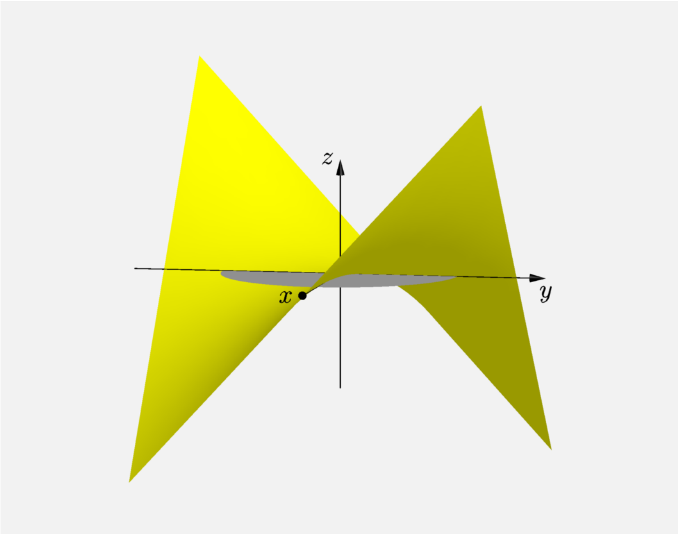
Globální extrémy

Příklad 2.

Zadání:

Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = 3xy$ (žlutá barva v obr. 1) na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$ (šedá barva v obr. 1).



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Funkce $f(x, y)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$, nejsme zde nijak omezeni. Množina M tvoří uzavřený kruh s poloměrem $r = 2$, a proto M je ohraničená a uzavřená. Jelikož jsou splněny předpoklady Weierstrassovy věty, existují globální extrémy pro zadanou funkci $f(x, y)$ na M. Můžeme tedy přejít ke hledání podezřelých bodů.

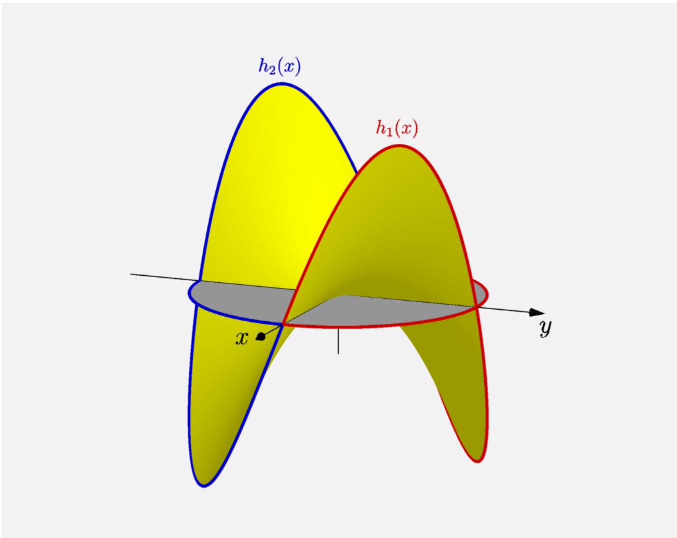
Nejdříve budeme hledat stacionární body uvnitř množiny M, tzn. všechny podezřelé body, pro které platí $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 4\}$. Vypočítáme první parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x \,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y$$

a položíme je rovny nule

$$3x = 0\,,$$
$$3y = 0\,.$$

Je zřejmé, že nalezený stacionární bod je pouze jeden a jedná se o bod $c_1 = (0, 0)$[1]. Bod c_1 opravdu leží uvnitř M, a tudíž se jedná o první podezřelý bod. Další podezřelé body budeme hledat na hranici M (viz obr. 2).



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ se zvýrazněnou hranicí

Hranice M tvoří kružnici o poloměru $r = 2$. Abychom byli schopni najít podezřelé body na ∂M, rozdělíme si ∂M na dvě samostatné poloviny

$$\partial M\colon x^2 + y^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x \in \langle -2, 2\rangle \wedge y = \pm\sqrt{4 - x^2}\,.$$

Jako první, budeme uvažovat úsek hranice $\partial M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in \langle -2, 2\rangle \wedge y = \sqrt{4 - x^2}\}$. Odpovídající funkce jedné proměnné, která má svůj průběh na ∂M_1, má předpis

$$h_1(x) = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = 3x\sqrt{4 - x^2}$$

(červená křivka v obr. 2). Funkce $h_1(x)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body pro $x \in (-2, 2)$, tj. uvnitř množiny ∂M_1.

[1] Je nutné poznamenat, že správný zápis pro bod c_1 by byl ve třech souřadnicích (graf funkce $f(x, y)$ je záležitosti 3D prostoru), ale v rámci tohoto textu budeme pro přehlednost uvádět pouze první dvě souřadnice (v rovině xy). Třetí souřadnici si čtenář dopočte sám.

Vypočítáme první derivaci $h_1(x)$

$$\begin{aligned} h_1'(x) &= 3\sqrt{4-x^2} + 3x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}(-2x) = \\ &= 3\sqrt{4-x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{3(4-x^2)-3x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{12-6x^2}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

a položíme ji rovnou nule

$$\begin{aligned} \frac{12-6x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= 0 \\ 12-6x^2 &= 0 \\ 6x^2 &= 12 \\ x^2 &= 2 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Dosadíme $x_{1,2}$ do předpisu pro y, dostaneme

$$y_{1,2} = \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-\left(\pm\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\,.$$

Nalezli jsme body $c_2 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ a $c_3 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Oba dva body leží uvnitř ∂M_1, a proto jsou dalšími podezřelými body. K podezřelým bodům přidáme i krajní body intervalu, tj. $c_4 = (-2, 0)$ a $c_5(2, 0)$. Stejný postup aplikujeme i v případě druhé části ∂M.

Druhá část ∂M je tvořena $\partial M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \langle -2, 2\rangle \wedge y = -\sqrt{4-x^2}\}$. Odpovídající funkce jedné proměnné má předpis

$$h_2(x) = f(x, -\sqrt{4-x^2}) = -3x\sqrt{4-x^2}$$

(modrá křivka v obr. 2). Funkce $h_2(x)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body pro $x \in (-2, 2)$, tj. uvnitř množiny ∂M_2. Vypočítáme první derivaci $h_2(x)$

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= -3\sqrt{4-x^2} - 3x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}(-2x) = \\ &= -3\sqrt{4-x^2} + \frac{3x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{-3(4-x^2)+3x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{-12+6x^2}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

a položíme ji rovnou nule

$$\begin{aligned}
\frac{-12+6x^2}{\sqrt{4-x^2}} &= 0\\
-12+6x^2 &= 0\\
6x^2 &= 12\\
x^2 &= 2\\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

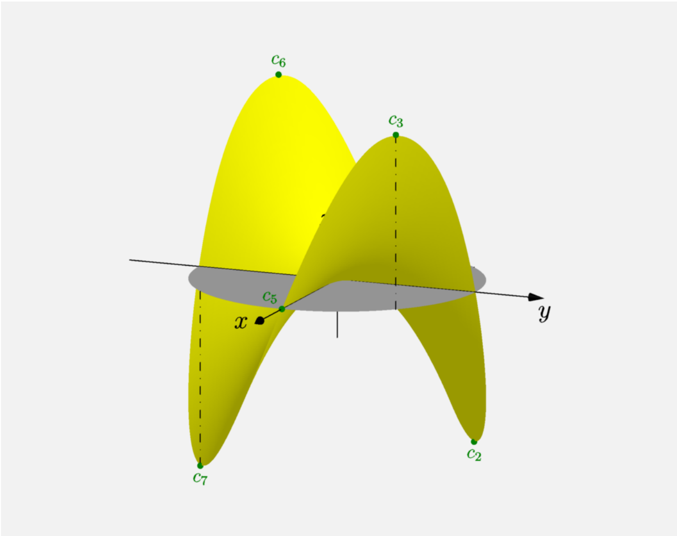
Dosadíme $x_{1,2}$ do předpisu pro y, dostaneme

$$y_{1,2} = -\sqrt{4-x^2} = -\sqrt{4-\left(\pm\sqrt{2}\right)^2} = -\sqrt{2}\,.$$

Nalezli jsme body $c_6 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ a $c_7 = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Oba dva body také leží uvnitř ∂M_2, a tudíž jsou dalšími podezřelými body. Krajní body nebudeme přidávat, protože jsou shodné s předešlými. V poslední řadě nám zbývá si vyjádřit funkční hodnoty v daných podezřelých bodech a rozhodnout, kde se nachází globální maximum a minimum. Vypočítejme tedy funkční hodnoty v daných bodech

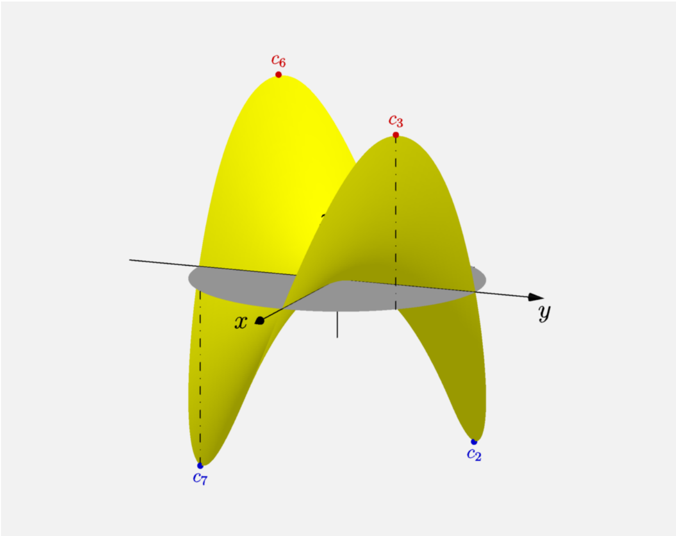
$$\begin{aligned}
f(c_1) &= f(0,0) = 0\,,\\
f(c_2) &= f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = -6\,,\\
f(c_3) &= f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 6\,,\\
f(c_4) &= f(-2,0) = 0\,,\\
f(c_5) &= f(2,0) = 0\,,\\
f(c_6) &= f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 6\,,\\
f(c_7) &= f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -6\,.
\end{aligned}$$

Porovnáním funkčních hodnot zjistíme, že globální maximum nastává v bodech c_3 a c_6 a globální minimum nastává v c_2 a c_7. V následujícím obrázku obr. 3 jsou zelenou barvou zobrazeny všechny podezřelé body, ve kterých může (ale nemusí!) být globální maximum nebo minimum. Žlutou barvou je vykreslena funkce $f(x,y)$ a šedou barvou množina M.



Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y)$ s podezřelými body

Na posledním obrázku (obr. 4) jsou znázorněny výsledné globální extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M. Minimum je vykresleno modrou barvou a maximum červenou barvou.



Obrázek 4: Graf funkce $f(x, y)$ s maximem a minimem

Poznámka na závěr:

Pozornější čtenář si všiml, že krajní body, které vznikly při rozdělení hranice, jsme nemuseli vůbec uvažovat jako podezřelé. Kdybychom totiž použili opačnou parametrizaci ∂M, tj.

$$\partial M: x^2 + y^2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad y \in \langle -2, 2 \rangle \wedge x = \pm\sqrt{4 - x^2}\,,$$

dostali bychom jiné krajní body a to $(0, -2)$, $(0, 2)$. Z toho vyplývá, že v daných krajních bodech nemůže být extrém.