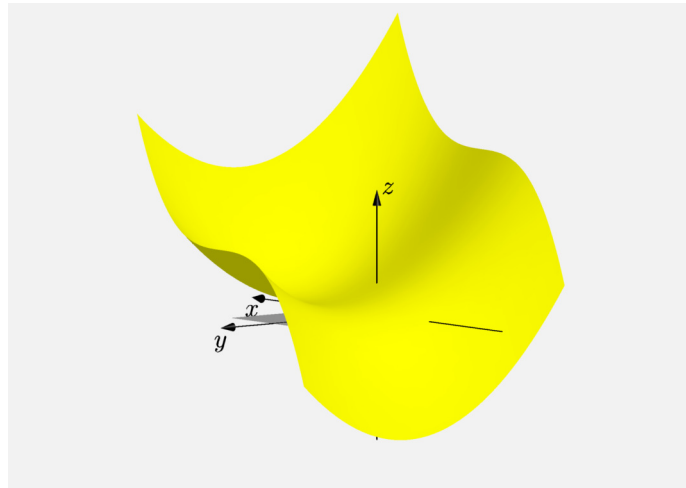


Globální extrémý

Příklad 1.

Zadání:

Najděte globální extrémý funkce $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2y + 2$ (žlutá barva v obr. 1) na množině $M = \langle -1, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$ (šedá barva v obr. 1).



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Podíváme-li se na předpis funkce $f(x, y)$, zjistíme, že zadaná funkce je spojitá na celém \mathbb{R}^2 (jedná se totiž o mnohočlen). Množina M je v našem případě zadána jako uzavřený interval v \mathbb{R}^2 , resp. tvoří uzavřený čtverec v rovině xy . V důsledku toho víme, že M je uzavřená a ohraničená množina. Funkce $f(x, y)$ je na M spojitá, což znamená, že jsou splněny všechny předpoklady Weierstrassovy věty, tzn. je zaručena existence globálních extrémů.

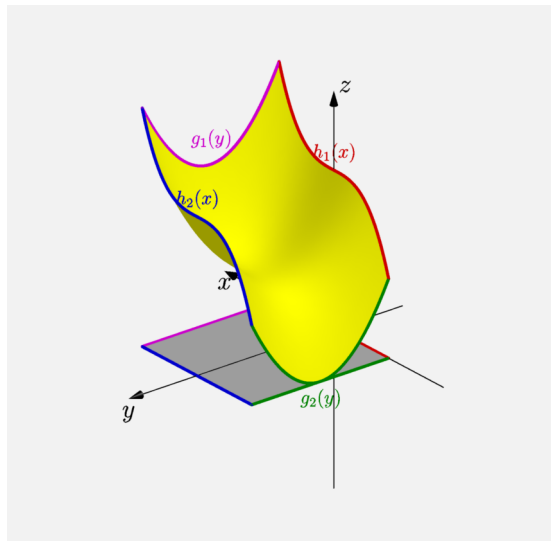
První podezřelé body budeme hledat uvnitř zadané množiny M (mimo její hranici!), tzn. budeme hledat všechny podezřelé body, pro které platí $(x, y) \in (-1, 1) \times (0, 2)$. Pro nalezení těchto bodů použijeme známý postup z lokálních extrémů. Spočítáme tedy první parciální derivace funkce $f(x, y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y - 2\end{aligned}$$

a položíme je rovny nule

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 0, \\ 2y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Z výše uvedených dvou rovnic o dvou neznámých se pokusíme vyjádřit, čemu se rovná proměnná x a čemu proměnná y . Získáme bod $c_1 = (0, 1)$ ¹. Jedná se o podezřelý bod, protože bod c_1 opravdu leží uvnitř M . Další stacionární body budeme hledat na hranici M (viz obr. 2).



Obrázek 2: Graf funkce $f(x, y)$ se zvýrazněnou hranicí

Hranice M je tvořena čtyřmi úsečkami, které jsou rovnoběžné s hlavními osami. Proto si hranici M rozdělíme podle jednotlivých úseček. Jako první úsek ∂M budeme například uvažovat hranici $\partial M_1 = \langle -1, 1 \rangle \times \{0\}$, přičemž nás budou zajímat stacionární body uvnitř této úsečky a její krajní body. Na ∂M_1 nyní nebudeme hledat stacionární body funkce $f(x, y)$, ale podezřelé body funkce jedné proměnné $f(x, 0)$ (máme totiž pevně dané $y = 0$ viz definice ∂M_1). Označme si $f(x, 0)$ jako $h_1(x)$, resp.

$$h_1(x) = f(x, 0) = x^3 + 2$$

(červená křivka v obr. 2). Funkce $h_1(x)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body uvnitř ∂M_1 , tj. v množině $(-1, 1) \times \{0\}$. Vypočítáme první derivaci $h_1(x)$

$$h_1'(x) = 3x^2$$

¹Je nutné poznamenat, že správný zápis pro bod c_1 by byl ve třech souřadnicích (graf funkce $f(x, y)$ je záležitostí 3D prostoru), ale v rámci tohoto textu budeme pro přehlednost uvádět pouze první dvě souřadnice (v rovině xy). Třetí souřadnici si čtenář dopočte sám.

a položíme ji rovnou nule

$$3x^2 = 0.$$

Je zřejmé, že $x = 0$. Jelikož je automaticky $y = 0$, dostaneme bod $c_2 = (0, 0)$. Bod c_2 leží uvnitř ∂M_1 , tzn. $c_2 \in (-1, 1) \times \{0\}$, a je dalším stacionárním bodem. K podezřelým bodům přidáme i krajní body ∂M_1 , tzn. body $c_3 = (-1, 0)$ a $c_4 = (1, 0)$. Stejným způsobem budeme postupovat i na zbylých částech hranice M .

Druhou část hranice M představuje úsečka $\partial M_2 = \langle -1, 1 \rangle \times \{2\}$. Na ∂M_2 obdržíme funkci $h_2(x)$

$$h_2(x) = f(x, 2) = x^3 + 2$$

(modrá křivka v obr. 2). Funkce $h_2(x)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body uvnitř ∂M_2 , tj. v množině $(-1, 1) \times \{2\}$. Vypočítáme první derivaci $h_2(x)$

$$h_2'(x) = 3x^2$$

a položíme ji rovnou nule

$$3x^2 = 0.$$

Opět je zřejmé, že $x = 0$. Dostaneme tedy bod $c_5 = (0, 2)$, který leží uvnitř ∂M_2 , a je dalším stacionárním bodem. K podezřelým bodům přidáme i krajní body ∂M_2 , resp. $c_6 = (-1, 2)$ a $c_7 = (1, 2)$.

Třetí část hranice M je reprezentována úsečkou $\partial M_3 = \{-1\} \times \langle 0, 2 \rangle$. Na ∂M_3 získáme funkci $g_1(y)$

$$g_1(y) = f(-1, y) = y^2 - 2y + 1$$

(zelená křivka v obr. 2). Funkce $g_1(y)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body uvnitř ∂M_3 , tj. v množině $\{-1\} \times (-1, 1)$. Vypočítáme první derivaci $g_1(y)$

$$g_1'(y) = 2y - 2$$

a položíme ji rovnou nule

$$2y - 2 = 0.$$

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že $y = 1$. Dostaneme bod $c_8 = (-1, 1)$. Bod c_8 leží uvnitř ∂M_3 a je dalším stacionárním bodem. Krajní body ∂M_3 již nebudeme uvažovat, jelikož jsou už uvažovány v případech ∂M_1 a ∂M_2 .

Čtvrtá a poslední část hranice M je tvořena úsečkou $\partial M_4 = \{1\} \times \langle 0, 2 \rangle$. Na ∂M_4 dostaneme funkci $g_2(y)$

$$g_2(y) = f(1, y) = y^2 - 2y + 3$$

(růžová křivka v obr. 2). Funkce $g_2(y)$ je definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu a má derivaci. Hledejme stacionární body uvnitř ∂M_4 , tj. v množině $\{1\} \times (-1, 1)$. Vypočítáme první derivaci $g_2(y)$

$$g_2'(y) = 2y - 2$$

a položíme ji rovnou nule

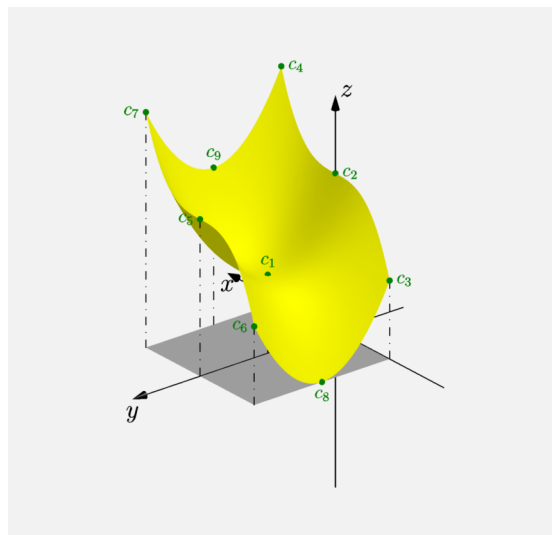
$$2y - 2 = 0.$$

Opět pomocí jednoduchého výpočtu zjistíme, že $y = 1$. Dostaneme poslední podezřelý bod $c_9 = (1, 1)$. Bod c_9 leží uvnitř ∂M_4 , a proto je dalším stacionárním bodem. Krajiní body ∂M_4 také nebudeme uvažovat, jelikož jsou už uvažovány v případech ∂M_1 a ∂M_2 .

Nyní, když jsme našly všechny potřebné body, nám zbývá vyjádřit funkční hodnoty v uvažovaných bodech

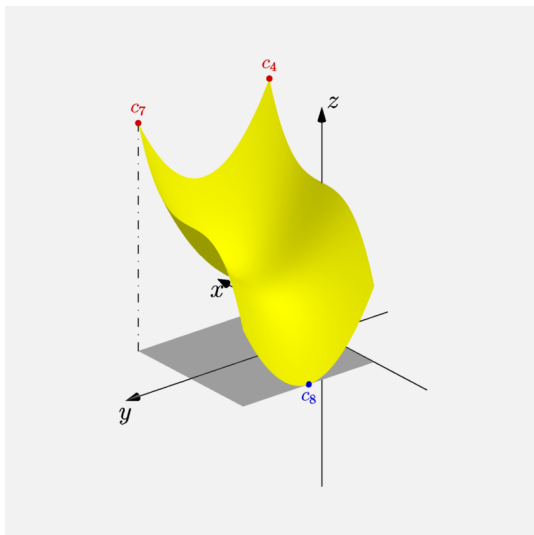
$$\begin{aligned} f(c_1) &= f(0, 1) = 0^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1, \\ f(c_2) &= f(0, 0) = 0^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2, \\ f(c_3) &= f(-1, 0) = -1^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 1, \\ f(c_4) &= f(1, 0) = 1^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 3, \\ f(c_5) &= f(0, 2) = 0^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2, \\ f(c_6) &= f(-1, 2) = -1^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 1, \\ f(c_7) &= f(1, 2) = 1^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 3, \\ f(c_8) &= f(-1, 1) = -1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 0, \\ f(c_9) &= f(1, 1) = 1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Porovnáním získaných funkčních hodnot můžeme vidět, že v c_4 a c_7 je globální maximum a v c_8 je globální minimum. Na následujícím obrázku (obr. 3) jsou zelenou barvou zobrazeny všechny podezřelé body, žlutou barvou funkce $f(x, y)$ a šedou barvou množina M .



Obrázek 3: Graf funkce $f(x, y)$ s podezřelými body

Na posledním obrázku (obr. 4) jsou znázorněny výsledné globální extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M . Minimum je vykresleno modrou barvou a maximum červenou barvou.



Obrázek 4: Graf funkce $f(x, y)$ s maximem a minimem