

## Diferenciál

### Příklad 3. (Výpočet přibližné hodnoty)

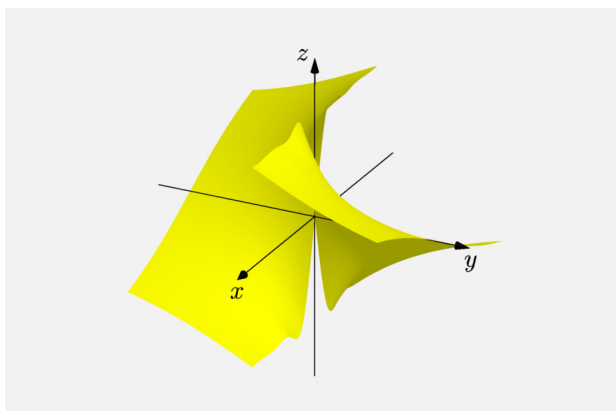
#### Zadání:

Pomocí diferenciálu vypočtete přibližně  $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,49}{0,85}\right)$ .

#### Řešení:

Pro výpočet přibližné hodnoty budeme potřebovat funkci  $f(x, y)$ , bod  $(x_0, y_0)$  a diference  $dx, dy$ . Vzhledem k zadání uvažujme

- funkci  $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ , viz obr. 1 ,
- bod  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  ,
- diference  $dx = 0,49$  a  $dy = -0,15$  .



Obrázek 1: Graf funkce  $f(x, y)$

Vypočteme první parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x}{y^2 \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)}.$$

Do vyjádřených předpisů prvních parciálních derivací dosadíme bod  $(1, 1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Diferenciál  $df_{(1,1)}(0,49; -0,15)$  je roven

$$\begin{aligned}df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy \\ df_{(1,1)}(0,49; -0,15) &= \frac{1}{2} \cdot 0,49 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-0,15) \\ df_{(1,1)}(0,49; -0,15) &= 0,32.\end{aligned}$$

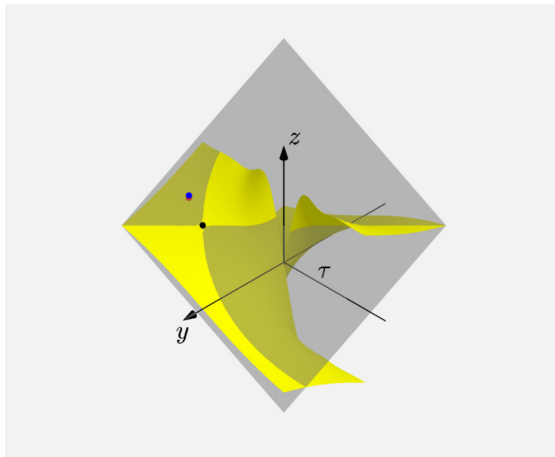
Přibližná hodnota  $\arctg\left(\frac{1,49}{0,85}\right)$  je rovna

$$\begin{aligned}\arctg\left(\frac{1,49}{0,85}\right) &\doteq f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) \\ \arctg\left(\frac{1,49}{0,85}\right) &\doteq \frac{\pi}{4} + 0,32 \doteq 1,1054.\end{aligned}$$

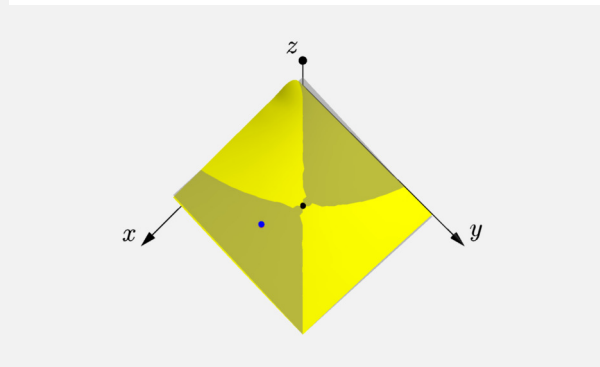
Pomocí diferenciálu jsme vypočetli přibližnou hodnotu  $\arctg\left(\frac{1,49}{0,85}\right)$ , která je 1,1054 ( $chyba = f(x, y) - (f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(dx, dy)) = 0,053$ ).

Na grafech níže (obr. 2 a obr. 3) je černou barvou znázorněný bod  $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ . Modrou barvou je označen bod  $(1,49; 0,85; 1,1054)$  ležící na tečné rovině  $\tau$ . Červenou barvou je označen bod  $(1,49; 0,85; 1,0524)$  ležící na grafu funkce  $f(x, y)$ . Tečná rovina  $\tau$  je znázorněná šedou barvou. Graf funkce  $f(x, y)$  je obarven žlutou barvou.

Na grafech je vidět, že body  $(1,49; 0,85; 1,1054)$  a  $(1,49; 0,85; 1,0524)$  (modrý a červený) jsou si blízké. Chyba, které jsme se dopustili, je poměrně malá.



Obrázek 2: Diferenciál



Obrázek 3: Diferenciál - detail