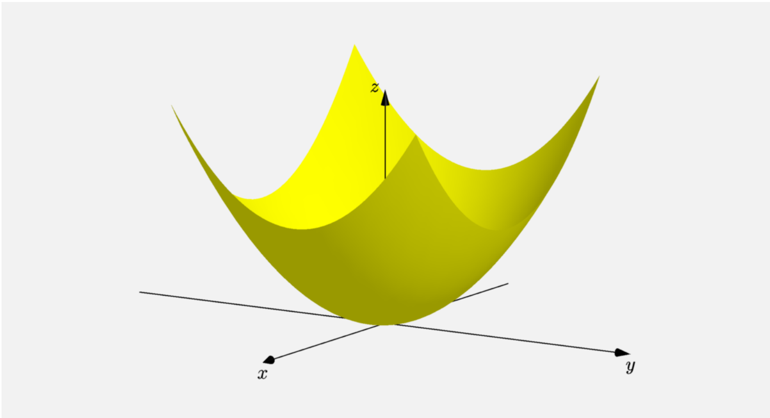
# Diferenciál

## Příklad 2. (Výpočet přibližné hodnoty)

### Zadání:

**a)** Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ (obr. 1) v bodě $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$.

**b)** Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně $f(x,y) = \frac{1}{2}\,(2{,}5)^2 + (-0{,}25)^2$.




Obrázek 1: Graf funkce $f(x,y)$

### Řešení:

**a)** Tečná rovina $\tau$ ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ existuje právě tehdy, když je funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $(x_0,y_0)$. Předpis tečné roviny $\tau$ je

$$\tau\colon\ z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

neboli

$$\tau\colon\ z - f(x_0,y_0) = \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0)\ .$$

K nalezení rovnice tečné roviny $\tau$ ke grafu funkce $f(x,y)$ je tedy třeba vypočítat parciální derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0)$. Vyjádřeme si nejprve jejich obecný předpis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\ .$$

Po dosazení bodu $(1,0)$ dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 1\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0\,.\end{aligned}$$

Námi vyjádřené první parciální derivace v bodě $(1,0)$ dosadíme do předpisu roviny $\tau$

$$\begin{aligned}\tau\colon\ z - f(x_0,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\\ \tau\colon\ z - \frac{1}{2} &= 1\cdot(x-1) + 0\cdot(y-0)\,,\end{aligned}$$

kde $1\cdot(x-1)+0\cdot(y-0) = \mathrm{d}f_{(1,0)}\,(x-1,y-0)$.

Výsledná rovnice roviny $\tau$ má tvar

$$\begin{aligned}\tau\colon\ z - \frac{1}{2} &= x-1\\ \tau\colon\ -x+z+\frac{1}{2} &= 0\,.\end{aligned}$$

**b)** Pro výpočet přibližné hodnoty budeme potřebovat funkci $f(x,y)$, bod $(x_0,y_0)$ a diference $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. Vzhledem k zadání uvažujme

- funkci $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$, viz obr. 1 ,
- bod $(x_0,y_0) = (1,0)$[1] ,
- diference $\mathrm{d}x = 1{,}5$ a $\mathrm{d}y = -0{,}25$ .

Pro výpočet diferenciálu použijeme vypočtené parciální derivace z části **a)**.
Diferenciál $\mathrm{d}f_{(1,0)}\,(1{,}5;-0{,}25)$ je roven

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}\,(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}f_{(1,0)}\,(1{,}5;-0{,}25) &= 1\cdot 1{,}5 + 0\cdot(-0{,}25)\\ \mathrm{d}f_{(1,0)}\,(1{,}5;-0{,}25) &= 1{,}5\,.\end{aligned}$$

Přibližná hodnota $f(x,y) = \frac{1}{2}\,(2{,}5)^2 + (-0{,}25)^2$ je rovna

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,(2{,}5)^2 + (-0{,}25)^2 &\doteq f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}\,(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\\ \frac{1}{2}\,(2{,}5)^2 + (-0{,}25)^2 &\doteq 0{,}5 + 1{,}5 = 2\,.\end{aligned}$$

[1]Jsme si vědomi toho, že tento bod není zvolen nejlépe, poslouží nám však k vysvětlení geometrického významu diferenciálu.

Pomocí diferenciálu jsme vypočetli přibližnou hodnotu $\frac{1}{2}\,(2{,}5)^2 + (-0{,}25)^2$, která je $2$.

Nyní si na obr. 2 vysvětlíme, jaký je geometrický význam diferenciálu a jaký je jeho vztah k tečné rovině $\tau$, kterou jsme nalezli v části **a)**.

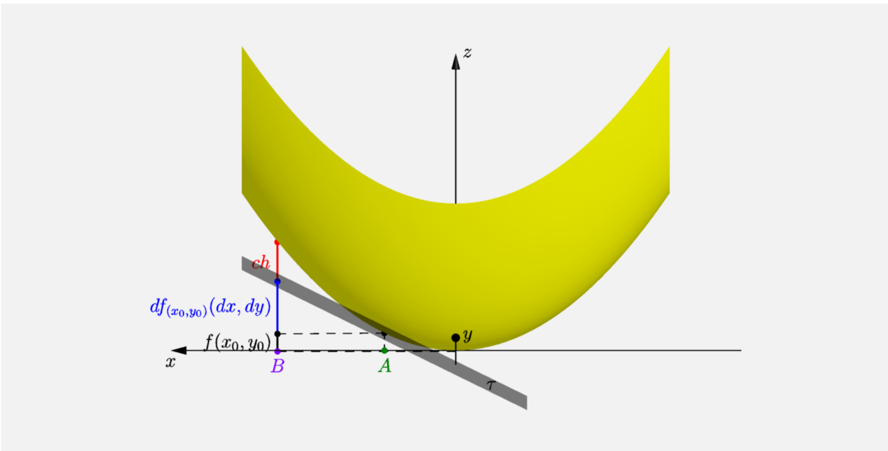
Jak už bylo řečeno, tak v části **a)** jsme hledali tečnou rovinu $\tau$ (šedá barva) ke grafu funkce $f(x,y)$ (žlutá barva) v bodě $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ (černá barva). Geometrický význam tečné roviny $\tau$ je zřejmý. Zelený bod $A$ na obr. 2 představuje průmět tečného bodu do roviny $xy$.

V části **b)** jsme počítali přibližnou hodnotu funkce $f(x,y)$ v bodě $(2{,}5; -0{,}25)$ pomocí diferenciálu. Vysvětleme si tedy jeho geometrický význam. Nechť $B$ značí bod, který dostaneme, posuneme-li se z bodu $A = (x_0, y_0)$ o $\mathrm{d}x$ ve směru osy $x$ a o $\mathrm{d}y$ ve směru osy $y$, tj. $B = (x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y)$. Vypočtená hodnota diferenciálu $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}\,(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 1{,}5$ představuje délku úsečky, která je v obr. 2 vyznačena modrou barvou. Přibližná hodnota $f(B) = f(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y) \doteq f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}\,(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 2$ představuje součet délek modré a černé úsečky. Je to tedy funkční hodnota funkce $\tau$ (tečné roviny) v bodě $B$. Tzn. funkční hodnotu funkce $f(x,y)$ v bodě $B$ aproximujeme funkční hodnotou funkce $\tau$ v bodě $B$.

Při aproximaci funkční hodnoty funkce $f(x,y)$ tečnou rovinou $\tau$ se dopouštíme jisté chyby (červená barva). Zkusme vypočítat, jak velké chyby jsme se dopustili

$$
\begin{aligned}
\mathit{chyba} &= f(x,y) - \left(f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}\,(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\right)\\
\mathit{chyba} &= f(2{,}5; -0{,}25) - \left[f(1,0) + \mathrm{d}f_{(1,0)}\,(1{,}5; -0{,}25)\right]\\
\mathit{chyba} &= 1{,}1875\,.
\end{aligned}
$$

Jak je vidět, dopustili jsme se poměrně velké chyby. Je to způsobeno špatnou volbou bodu $(x_0,y_0)$. Pro přesnější aproximaci by bylo lepší zvolit $(x_0,y_0) = (2{,}0)$. Diference $\mathrm{d}x$ by se zmenšila na hodnotu $0{,}5$ a velikost chyby by klesla na hodnotu $0{,}1875$. Výsledek by však byl na obr. 2 málo názorný.




Obrázek 2: Diferenciál