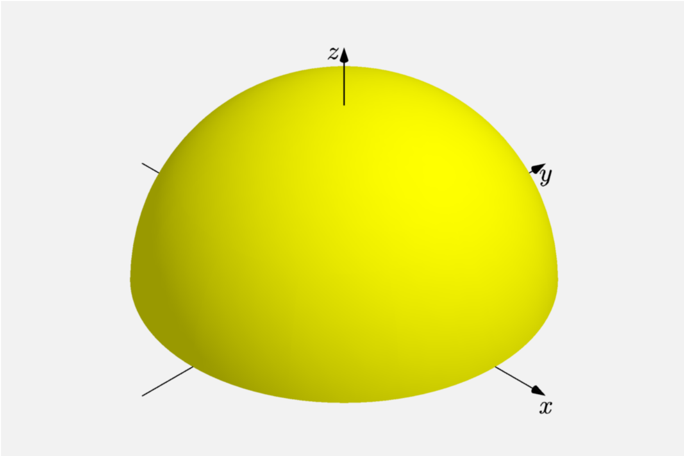
Diferenciál

Příklad 1. (Tečná rovina)

Zadání:

Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (obr. 1) v bodě $T = (1, -2, ?)$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Víme, že tečná rovina τ ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ existuje právě tehdy, když je funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě (x_0, y_0). Předpis tečné roviny τ je

$$\tau\colon\, z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

neboli

$$\tau\colon\, z - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0)\ .$$

K nalezení rovnice tečné roviny τ ke grafu funkce $f(x, y)$ je tedy třeba vypočítat parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0). Vyjádřeme si nejprve jejich obecný předpis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\,.$$

Dříve než dosadíme bod $(1,-2)$ je třeba zjistit, zda jsou vypočtené parciální derivace spojité na celém $D(f)$. $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 9\}$. Jedná se o kruh o poloměru 3. Podíváme-li se na definiční obor vypočtených parciálních derivací, tak v obou případech je díky jmenovateli zřejmé, že $D(\partial f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < 9\}$. Definiční obor vypočtených parciálních derivací je kruh bez hraničních bodů (bez kružnice o poloměru 3). Bod $(1,-2)$ náleží oběma definičním oborům, a proto ho lze bez problému dosadit. Pokud by bod nespadal do obou definičních oborů, úloha by nebyla řešitelná.

Dosaďme bod $(1,-2)$ do předpisu pro první parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = -\frac{1}{2}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = 1\,.$$

Dosazením bodu $(1,-2)$ do vypočtených parciálních derivací jsme získali směrnice tečen t_1 a t_2. Tečny t_1 a t_2 se dotýkají grafu funkce $f(x,y)$ v bodě T a určují námi hledanou tečnou rovinu τ.
Zbývá ještě vypočítat funkční hodnotu $f(x,y)$ v bodě $(1,-2)$

$$f(x_0,y_0) = f(1,-2) = \sqrt{9-1-4} = 2\,.$$

Nyní můžeme dosadit do předpisu roviny τ

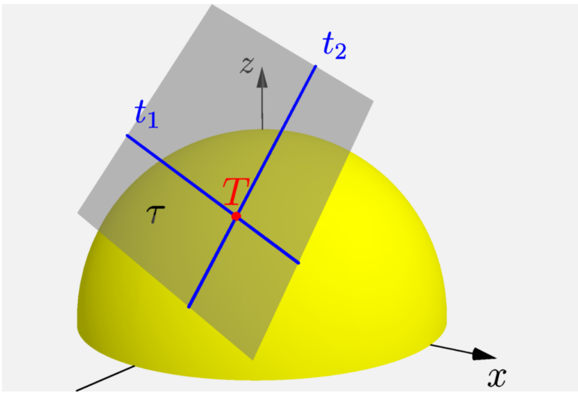
$$\tau\colon z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$
$$\tau\colon z - 2 = -\frac{1}{2}\cdot(x-1) + 1\cdot(y+2)\ ,$$

kde $-\frac{1}{2}\cdot(x-1)+1\cdot(y+2) = \mathrm{d}f_{(1,-2)}\,(x-1,y+2)$.

Výsledná rovnice roviny τ má tvar

$$\tau\colon z-2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + y + 2$$
$$\tau\colon x - 2y + 2z - 9 = 0\,.$$

Na obr. 2 je tečná rovina τ znázorněna šedou barvou. Tečny t_1 a t_2 jsou obarveny modrou barvou. Červenou barvou je znázorněn tečný bod T. Graf funkce $f(x,y)$ je znázorněn žlutou barvou.



Obrázek 2: Tečná rovina ke grafu $f(x, y)$ v bodě T

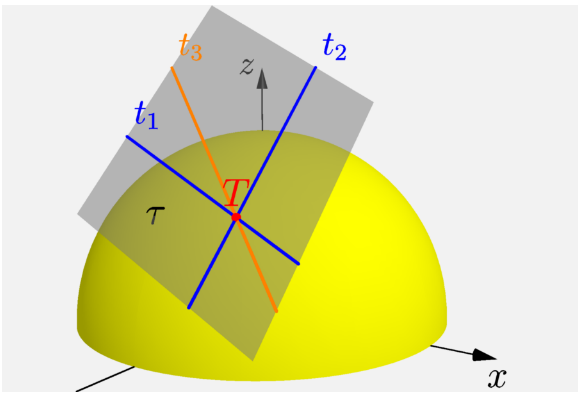
Z obr. 2 je patrný geometrický význam parciálních derivací ve vztahu k tečné rovině. Podívejme se ještě na geometrický význam směrové derivace ve vztahu k tečné rovině.

Směrovou derivaci spočtěme například ve směru vektoru $\mathbf{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0), \mathbf{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot u_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \, .$$

Číslo $\frac{2}{\sqrt{5}}$ nám udává směrnici „třetí“ tečny.

Na obr. 3 vidíme, že námi přidaná tečna, kterou jsme vypočítali pomocí směrové derivace (oranžová barva), leží spolu s tečnami, které jsme vypočítali pomocí parciálních derivací (modrá barva), na tečné rovině τ. Tečná rovina τ je znázorněná šedou barvou. Žlutou barvou je znázorněný graf funkce $f(x, y)$. Červenou barvou je znázorněn tečný bod T.



Obrázek 3: Tečná rovina a tři tečny ke grafu funkce $f(x, y)$