Definiční obor funkce dvou proměnných

Příklad 3.

Zadání:

Určete a zakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$.

Řešení:

Určíme množinu takových $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má předpis $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ smysl. Výraz pod odmocninou $\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)$ musí být větší nebo roven 0. Toho docílíme ve dvou situacích. V prvním případě budou výrazy $\left(1-x^2\right)$ a $\left(1-y^2\right)$ kladné nebo rovny 0. Ve druhém případě budou výrazy $\left(1-x^2\right)$ a $\left(1-y^2\right)$ záporné nebo rovny 0.
První situace:

$$\begin{aligned}
1-x^2 &\geq 0 && \wedge && 1-y^2 \geq 0 \\
(1-x)(1+x) &\geq 0 && \wedge && (1-y)(1+y) \geq 0 \\
x &\in \langle -1, 1\rangle && \wedge && y \in \langle -1, 1\rangle\,.
\end{aligned}$$

$D_1(f)$ je roven

$$D_1(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \langle -1, 1\rangle \wedge y \in \langle -1, 1\rangle\right\}\,.$$

Druhý případ:

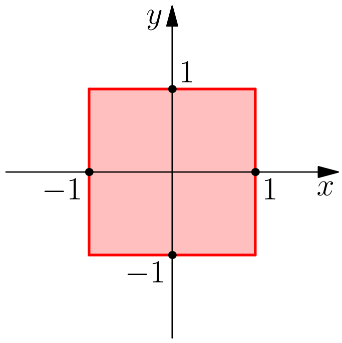
$$\begin{aligned}
1-x^2 &\leq 0 && \wedge && 1-y^2 \leq 0 \\
(1-x)(1+x) &\leq 0 && \wedge && (1-y)(1+y) \leq 0 \\
x &\in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty) && \wedge && y \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)\,.
\end{aligned}$$

$D_2(f)$ je roven

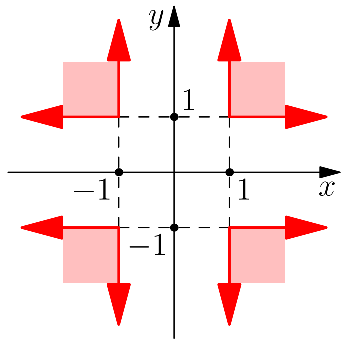
$$D_2(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty) \wedge y \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)\right\}\,.$$

Výsledný $D(f)$ odpovídá množině

$$D(f) = D_1(f) \cup D_2(f)\,.$$

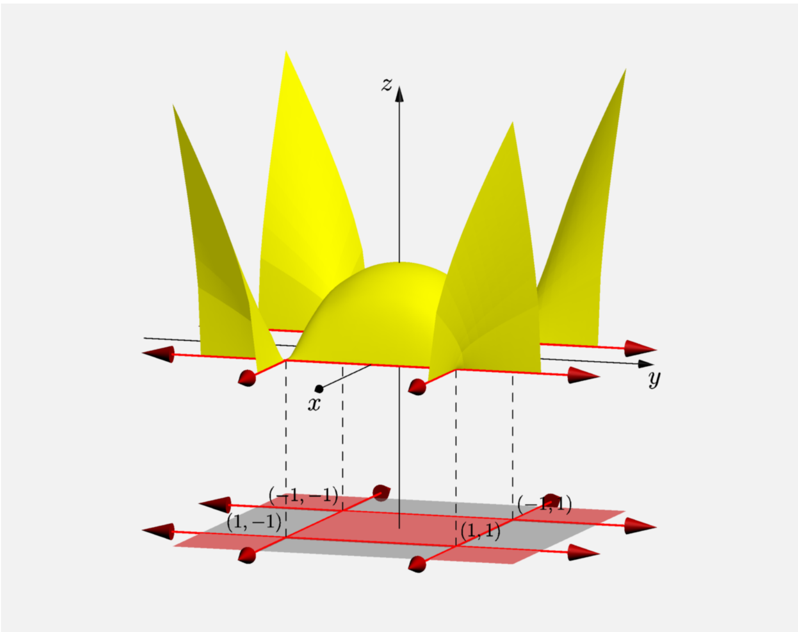


Obrázek 1: Definiční obor $D_1(f)$



Obrázek 2: Definiční obor $D_2(f)$

Podívejme se na obr. 3, kde je červenou barvou znázorněný definiční obor. Žlutou barvou je znázorněný graf funkce $f(x, y)$. Šedou barvou je znázorněná rovina xy. Černou barvou jsou označeny souřadnice (x, y) v rovině xy.



Obrázek 3: Definiční obor + funkce $f(x, y)$