Definiční obor funkce dvou proměnných

Příklad 2.

Zadání:

Určete a zakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \ln\big((9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\big)$.

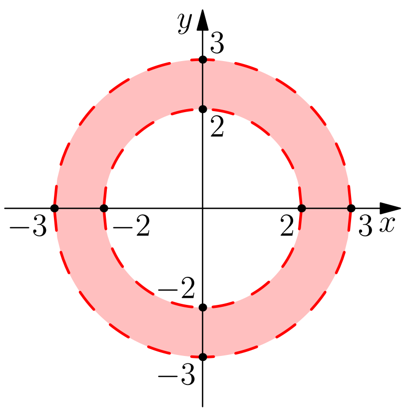
Řešení:

Definiční obor $D(f)$ je množina takových $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má předpis $\ln\big((9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\big)$ smysl. Je tedy zřejmé, že výraz $\left(9 - x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right)$ musí být větší než 0. Toho dosáhneme ve dvou situacích. V prvním případě bude výraz $\left(9 - x^2 - y^2\right)$ kladný a současně výraz $\left(x^2 + y^2 - 4\right)$ bude také kladný. Ve druhém případě bude výraz $\left(9 - x^2 - y^2\right)$ záporný a současně výraz $\left(x^2 + y^2 - 4\right)$ bude také záporný. První situace:

$$
\begin{aligned}
9 - x^2 - y^2 &> 0 \qquad &\wedge& \qquad & x^2 + y^2 - 4 &> 0 \\
x^2 + y^2 &< 9 \qquad &\wedge& \qquad & x^2 + y^2 &> 4\,.
\end{aligned}
$$

$D_1(f)$ je roven

$$D_1(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4 < x^2 + y^2 < 9\right\}\ .$$



Obrázek 1: Definiční obor $D_1(f)$

Druhá situace:

$$\begin{aligned} 9-x^2-y^2<0 \qquad & \wedge \qquad & x^2+y^2-4<0 \\ x^2+y^2>9 \qquad & \wedge \qquad & x^2+y^2<4\,. \end{aligned}$$

$D_2(f)$ je roven

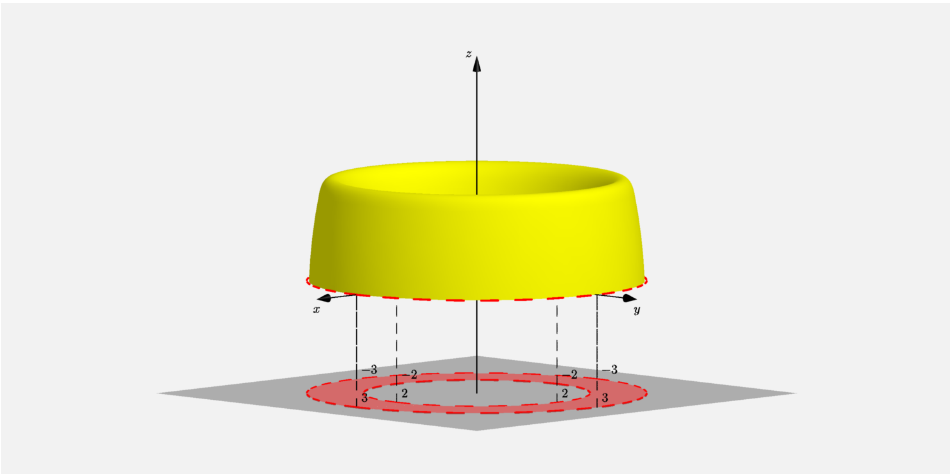
$$D_2(f)=\varnothing\,.$$

Výsledný $D(f)$ odpovídá množině

$$D(f)=D_1(f)\cup D_2(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 4<x^2+y^2<9\right\}\,.$$

Definiční obor $D(f)$ funkce $f(x,y)$ představuje mezikruží, které leží mezi kružnicí o poloměru 2 a kružnicí o poloměru 3 (mimo tyto kružnice!). Tomuto závěru odpovídá i grafické znázornění, viz obr. 2.

Žlutou barvou je znázorněn graf funkce $f(x,y)$. Vykreslení grafu funkce $f(x,y)$ zcela neodpovídá realitě, neboť funkce není zdola ohraničena. Dále je červenou barvou znázorněný definiční obor. Šedou barvou je znázorněná rovina xy. Čísla reprezentují příslušné souřadnice na dané ose.



Obrázek 2: Definiční obor + funkce $f(x,y)$