Pearsonův χ^2 test dobré shody

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- **Př. 1:** Ve vjezdové skupině kolejí byly sledovány počty přijíždějících vlaků za 1 hodinu. Za 15 dní (tedy 360 hodin) přijelo celkem 827 vlaků. Výsledky sledování jsou uvedeny v tabulce.

Vlaků / h	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	27	93	103	58	50	21	6	2

Na hladině významnosti 0,05 otestujte hypotézu, že počet přijíždějících vlaků za hodinu se řídí Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti.

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Abychom byli schopni specifikovat nulovou a alternativní hypotézu, je nejdříve třeba odhadnout na základě výběru neznámý parametr Poissonova rozdělení λ. Odhad provedeme pomocí metody maximální věrohodnosti. Odvodili jsme si, že:

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot v_i = \frac{1}{360} \cdot (0 \cdot 27 + 1 \cdot 93 + \ldots + 7 \cdot 2) \doteq 2{,}30.$$

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Máme proveden odhad parametru rozdělení, můžeme tedy specifikovat obě hypotézy:
  - H_0 – Náhodný výběr pochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda = 2{,}30$.
  - H_1 – Náhodný výběr nepochází z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda = 2{,}30$.

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Víme, že pro testovou statistiku platí:

$$G = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - n \cdot \pi_{0,i}\right)^2}{n \cdot \pi_{0,i}} \rightarrow \chi^2_{k-h-1},$$

kde *k* v tomto případě představuje počet variant proměnné. Pozorované četnosti známe, zbývá nám tedy stanovit četnosti teoretické.

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Teoretické relativní četnosti $\pi_{0,i}$ vypočítáme dosazením do pravděpodobnostní funkce:

$$\pi_{0,1}=P(X=0)=\frac{2{,}30^0}{0!}\cdot e^{-2{,}30}\doteq 0{,}100, \pi_{0,2}=P(X=1)=\frac{2{,}30^1}{1!}\cdot e^{-2{,}30}\doteq 0{,}231,$$

$$\pi_{0,3}=P(X=2)=\frac{2{,}30^2}{2!}\cdot e^{-2{,}30}\doteq 0{,}265, \pi_{0,4}=P(X=3)=\frac{2{,}30^3}{3!}\cdot e^{-2{,}30}\doteq 0{,}203,$$

$$\pi_{0,5}=P(X=4)=\frac{2{,}30^4}{4!}\cdot e^{-2{,}30}\doteq 0{,}117, \pi_{0,6}=P(X=5)=\frac{2{,}30^5}{5!}\cdot e^{-2{,}30}\doteq 0{,}054,$$

$$\pi_{0,7}=P(X=6)=\frac{2{,}30^6}{6!}\cdot e^{-2{,}30}\doteq 0{,}021, \pi_{0,8}=P(X\geq 7)=1-P(X<7)=$$

$$=1-\sum_{i=1}^{6}\pi_{0,i}\doteq 0{,}009.$$

Pearsonův χ^2 test dobré shody

Třída	Varianta proměnné v_i	Pozorovaná četnost n_i	Teoretická relativní četnost $\pi_{0,i}$	Teoretická četnost $n \cdot \pi_{0,i}$
1	0	27	0,100	36,000
2	1	93	0,231	83,160
3	2	103	0,265	95,400
4	3	58	0,203	73,080
5	4	50	0,117	42,120
6	5	21	0,054	19,440
7	6	6	0,021	7,560
8	7 a více	2	0,009	3,240
$\sum$		360	1,000	360

Pearsonův χ^2 test dobré shody

Z tabulky vidíme, že pro 8. třídu nemáme teoretickou četnost větší než 5, musíme ji teda sloučit se 7. třídou (dojde k poklesu o 1 stupeň volnosti).

Pozorovaná četnost n_i	Teoretická četnost $n \cdot \pi_{0,i}$	$\frac{(n_i - n \cdot \pi_{0,i})^2}{n \cdot \pi_{0,i}}$
27	36,000	2,250
93	83,160	1,164
103	95,400	0,605
58	73,080	3,112
50	42,120	1,474
21	19,440	0,125
8	10,800	0,726
360	360	**9,45686**

x_{obs}

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Nyní je třeba stanovit kritickou hodnotu testu. Jelikož hladina významnosti α = 0,05, po sloučení máme 7 tříd (*k*) a odhadovali jsme 1 parametr rozdělení (*h*), dostáváme:

$$x_{krit} = \chi^2_{(1-\alpha);k-h-1} = \chi^2_{0,95;5} = CHIINV\left(0{,}05;5\right) \doteq 11{,}07.$$

- Vidíme, že pozorovaná hodnota testové statistiky není vyšší než kritická hodnota testu, leží tedy v oboru přijetí, proto na hladině významnosti 0,05 nezamítáme nulovou hypotézu o tom, že počet přijížďějících vlaků za hodinu se řídí Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti.

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- **Př. 2:** V systému hromadné obsluhy bylo provedeno měření doby obsluhy v [min]. Získaný roztříděný statistický soubor je uveden v tabulce. Na hladině významnosti 0,01 otestujte hypotézu, že doba obsluhy se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti.

Pearsonův χ^2 test dobré shody

Třída	Hranice třídy	Třídní znak z_i	Horní hranice h_i	Pozorovaná četnost n_i
1	(0;3>	1,5	3	14
2	(3;6>	4,5	6	16
3	(6;9>	7,5	9	10
4	(9;12>	10,5	12	9
5	(12;15>	13,5	15	8
6	(15;18>	16,5	18	5
7	(18;21>	19,5	21	3
8	(21;∞)	22,5	∞	5
∑				70

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Abychom byli schopni specifikovat nulovou a alternativní hypotézu, je nejdříve třeba odhadnout na základě výběru neznámý parametr exponenciálního rozdělení μ. Odhad provedeme pomocí metody maximální věrohodnosti. Odvodili jsme si, že:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot z_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot z_i} = \frac{70}{14 \cdot 1{,}5 + \ldots + 5 \cdot 22{,}5} \doteq 0{,}112.$$

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Máme proveden odhad parametru rozdělení, můžeme tedy specifikovat obě hypotézy:
  - H_0 – Náhodný výběr pochází z exponenciálního rozdělení s parametrem $\mu = 0{,}112$.
  - H_1 – Náhodný výběr nepochází z exponenciálního rozdělení s parametrem $\mu = 0{,}112$.

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Než přistoupíme k výpočtu teoretických relativních četností, stanovme si hodnoty distribuční funkce exponenciálního rozdělení pro všechny horní hranice tříd h_i:

$$F(h_1)=1-e^{-0{,}112\cdot 3}\doteq 0{,}286,\ F(h_2)=1-e^{-0{,}112\cdot 6}\doteq 0{,}490,$$
$$F(h_3)=1-e^{-0{,}112\cdot 9}\doteq 0{,}636,\ F(h_4)=1-e^{-0{,}112\cdot 12}\doteq 0{,}740,$$
$$F(h_5)=1-e^{-0{,}112\cdot 15}\doteq 0{,}814,\ F(h_6)=1-e^{-0{,}112\cdot 18}\doteq 0{,}867,$$
$$F(h_7)=1-e^{-0{,}112\cdot 21}\doteq 0{,}905,\ F(h_8)=1.$$

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Teoretické relativní četnosti můžeme stanovit na základě znalosti hodnot distribuční funkce:

$$\pi_{0,1} = F(h_1) = 0{,}286, \pi_{0,2} = F(h_2) - F(h_1) = 0{,}204,$$
$$\pi_{0,3} = F(h_3) - F(h_2) = 0{,}146, \pi_{0,4} = F(h_4) - F(h_3) = 0{,}104,$$
$$\pi_{0,5} = F(h_5) - F(h_4) = 0{,}074, \pi_{0,6} = F(h_6) - F(h_5) = 0{,}053,$$
$$\pi_{0,7} = F(h_7) - F(h_6) = 0{,}038, \pi_{0,8} = F(h_8) - F(h_7) = 0{,}095.$$

Pearsonův χ^2 test dobré shody

Třída	Hranice třídy	Třídní znak z_i	Horní hranice h_i	Pozorovaná četnost n_i	Hodnota distribuční funkce $F(h_i)$	Teoretická relativní četnost $\pi_{0,i}$	Teoretická četnost $n \cdot \pi_{0,i}$
1	(0;3>	1,5	3	14	0,286	0,286	20,020
2	(3;6>	4,5	6	16	0,490	0,204	14,280
3	(6;9>	7,5	9	10	0,636	0,146	10,220
4	(9;12>	10,5	12	9	0,740	0,104	7,280
5	(12;15>	13,5	15	8	0,814	0,074	5,180
6	(15;18>	16,5	18	5	0,867	0,053	3,710
7	(18;21>	19,5	21	3	0,905	0,038	2,660
8	(21;∞)	22,5	∞	5	1,000	0,095	6,650
∑				70		1,000	70

- Z tabulky vidíme, že u tříd 6 a 7 nemáme teoretickou četnost větší než 5, proto provedeme sloučení příslušných tříd.

Pearsonův χ^2 test dobré shody

Pozorovaná četnost n_i	Teoretická četnost $n \cdot \pi_{0,i}$	$\frac{(n_i - n \cdot \pi_{0,i})^2}{n \cdot \pi_{0,i}}$
14	20,020	1,810
16	14,280	0,207
10	10,220	0,005
9	7,280	0,406
8	5,180	1,535
8	6,370	0,417
5	6,650	0,409
70	70	**4,79020**

x_{obs}

Pearsonův χ^2 test dobré shody

- Nyní je třeba stanovit kritickou hodnotu testu. Jelikož hladina významnosti α = 0,01, po sloučení máme 7 tříd (*k*) a odhadovali jsme 1 parametr rozdělení (*h*), dostáváme:

$$x_{krit} = \chi^2_{(1-\alpha);k-h-1} = \chi^2_{0,99;5} = CHIINV\left(0{,}01;5\right) \doteq 15{,}09.$$

- Vidíme, že pozorovaná hodnota testové statistiky není vyšší než kritická hodnota testu, leží tedy v oboru přijetí, proto na hladině významnosti 0,01 nezamítáme nulovou hypotézu o tom, že doba obsluhy se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti.