3. část: Teorie hromadné obsluhy

Základy teorie pravděpodobnosti

- **Náhodný pokus** je děj, jehož výsledek není ani při dodržení všech předepsaných podmínek předem znám.
- **Náhodný jev** je výsledkem náhodného pokusu, náhodné jevy označujeme X,Y,…
- **Elementární jev E** – jev, který nejde dále rozložit.
- **Základní prostor Ω** – množina všech elementárních jevů.

Základy teorie pravděpodobnosti

- **Jistý jev I** – jev, který vždy nastane (jev, který nastane s pravděpodobností 1).
- **Nemožný jev 0** – jev, který nikdy nenastane.
- **Opačný jev** – opačný jev k jevu A je jev $\bar{A}$, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A.
- **Disjunktní jevy** – jevy A a B jsou disjunktní, nemohou-li nastat současně.

Základy teorie pravděpodobnosti

- Axiomatické zavedení pravděpodobnosti:
  1. Pravděpodobnost jevu je nezáporná veličina.
     $P(A) \geq 0$
  2. Pravděpodobnost sjednocení konečně nebo spočetně mnoho disjunktních jevů je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů.
     $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$
  3. Pravděpodobnost jevu jistého je rovna 1.
     $P(I) = 1$

Základy teorie pravděpodobnosti

- Na základě uvedených axiomů plyne, že pravděpodobnost jevu opačného k jevu A je rovna doplňku do 1.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Náhodná proměnná a její popis

- **Náhodná proměnná** je reálná funkce definovaná na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo.
- Rozlišujeme náhodnou proměnnou:
  - **Diskrétní** (obor hodnot náhodné proměnné je konečná nebo nekonečná posloupnost).
  - **Spojitou** (obor hodnot náhodné proměnné je určitý konečný nebo nekonečný interval).

Náhodná proměnná a její popis

- Diskrétní náhodnou proměnnou můžeme popsat funkčními závislostmi:
  - Pravděpodobnostní funkce $p(x) = P(X = x)$.
  - Distribuční funkce $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$.
- Spojitou náhodnou proměnnou můžeme popsat pomocí:
  - Hustoty pravděpodobnosti $f(x)$.
  - Distribuční funkce $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Náhodná proměnná a její popis

- Pro distribuční funkci DNP i SNP platí:
  - $0 \leq F(x) \leq 1$.
  - $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.
  - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.
- Pro pravděpodobnostní funkci DNP platí:
  - $0 \leq p(x_i) \leq 1$.
  - $\sum_{x_i} p(x_i) = 1$.

Náhodná proměnná a její popis

- Pro hustotu pravděpodobnosti SNP platí:
  - $f(x) \geq 0.$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Náhodná proměnná a její popis

- Náhodnou proměnnou můžeme dále popsat pomocí číselných charakteristik. Číselné charakteristiky NP dělíme:
  - Podle způsobu výpočtu na momentové, kvantilové a ostatní.
  - Podle toho, které vlastnosti rozdělení pravděpodobnosti charakterizují na charakteristiky polohy, variability, šikmosti a špičatosti.

Náhodná proměnná a její popis

- Střední hodnota (počáteční moment 1. řádu):
  - Pro DNP $EX = \mu_1 = \sum_{x_i} x_i p(x_i)$.
  - Pro SNP $EX = \mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.
- Pro střední hodnotu platí:
  - $E(c) = c$.
  - $E(cX) = cEX$.
  - $E(X \pm Y) = EX \pm EY$.

Náhodná proměnná a její popis

- Rozptyl (centrální moment 2. řádu):
  - Pro DNP $DX = \sigma^2 = \nu_2 = \sum_{x_i} (x_i - EX)^2 p(x_i)$.
  - Pro SNP $DX = \sigma^2 = \nu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$
- Při výpočtech rozptylu se spíš užívá vztahu:

$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$,

kde pro DNP $EX^2 = \sum_{x_i} x_i^2 p(x_i)$, pro SNP $EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$.

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti – Po(λ)

- Patří mezi diskrétní náhodné proměnné.
- Rozdělení je definováno jedním parametrem $\lambda > 0$ – střední počet událostí za jednotku času. Poissonova NP může nabývat hodnot 0,1,2,… a může např. představovat počet zákazníků přicházejících za jednotku času.
- Pravděpodobnostní funkce je definována:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{pro } \lambda>0, k=0,1,2\ldots,$$

$$P(X=k)=0 \quad \text{jinde.}$$

- Pro střední hodnotu a rozptyl platí:

$$EX=DX=\lambda\,.$$

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti – Po(λ)

- Odvození vztahu pro střední hodnotu:

$$EK = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k \cdot (k-1)!} \cdot e^{-\lambda} =$$

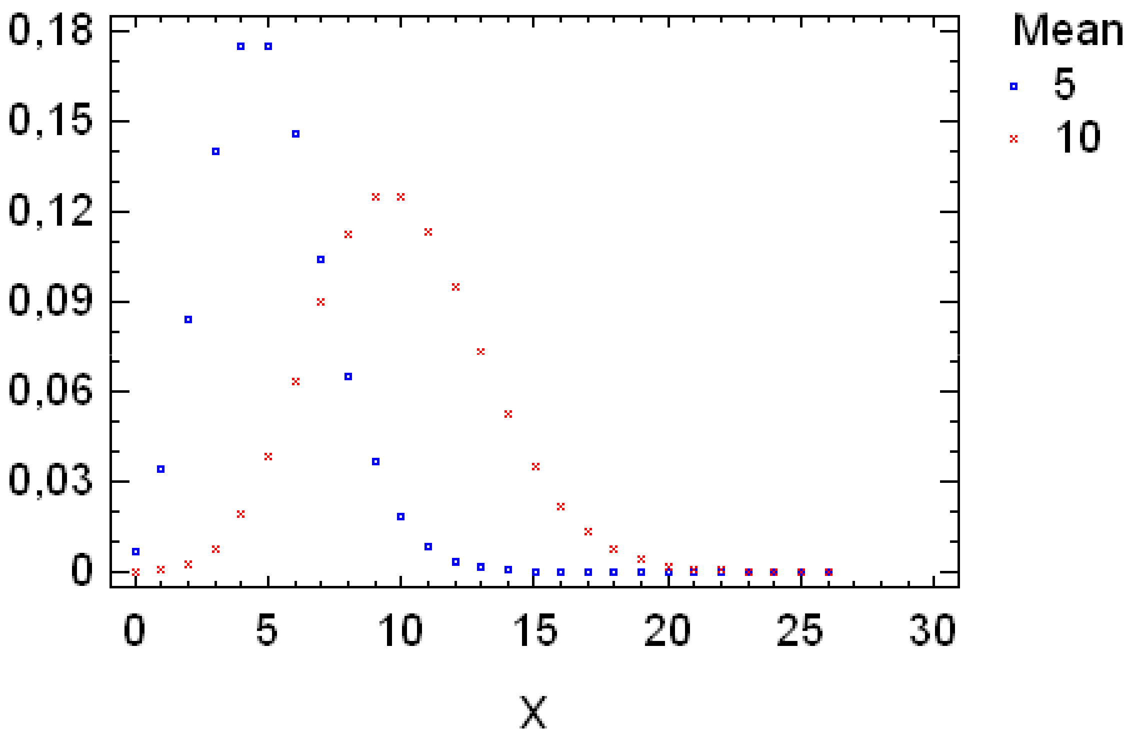
$$\lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right)^{*} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda .$$

---

* Maclaurinova řada

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots .$$

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti – Po(λ)



Ukázka průběhu pravděpodobnostní funkce Poissonovy náhodné proměnné.

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti E(λ)

- Patří mezi spojitá rozdělení pravděpodobnosti.
- Rozdělení je definováno jedním parametrem $\lambda > 0$. Exponenciální NP představuje dobu trvání činnosti (např. obsluhy zákazníka), příp. dobu mezi jednotlivými událostmi (příchody zákazníků) – jestliže se počet přicházejících zákazníků za jednotku času řídí Poissonovým rozdělením, potom délky mezer mezi příchody zákazníků se řídí exponenciálním rozdělením.

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti E(λ)

- Pro hustotu pravděpodobnosti platí:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{pro } \lambda > 0, x > 0,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{jinde.}$$

- Pro distribuční funkci platí:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{pro } \lambda > 0, \mathrm{x} > 0,$$
$$F(x) = 0 \quad \text{jinde.}$$

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti E(λ)

- Pro střední hodnotu exponenciální NP platí:

$$EX = \frac{1}{\lambda}\,.$$

- Pro rozptyl exponenciální NP platí:

$$DX = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti E(λ)

- Odvození vztahu pro střední hodnotu:

$$EX = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = \lambda \cdot \lim_{a \to +\infty} \int_0^{a} xe^{-\lambda x}dx^{*} =$$

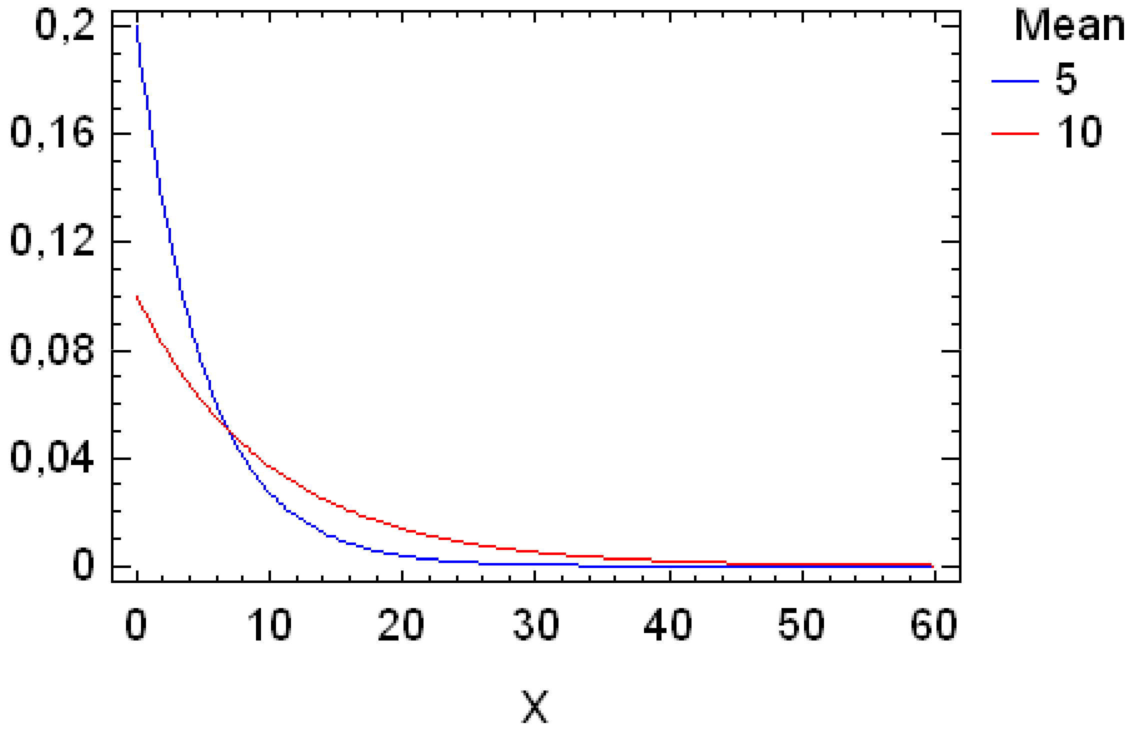
$$\lambda \cdot \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{-a}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \lambda \cdot \left(-0 - 0 + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

$$* \int_0^a xe^{-\lambda x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-\lambda x} \\ u' = 1 & v = \dfrac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \end{array} \right| = \left[\frac{-x}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^a - \int_0^a \frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}dx = \left[\frac{-x}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^a + \frac{1}{\lambda} \int_0^a e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \left[\frac{-x}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^a + \frac{1}{\lambda} \cdot \left[\frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^a = \frac{-a}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda 0} \right) = \frac{-a}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda 0} =$$

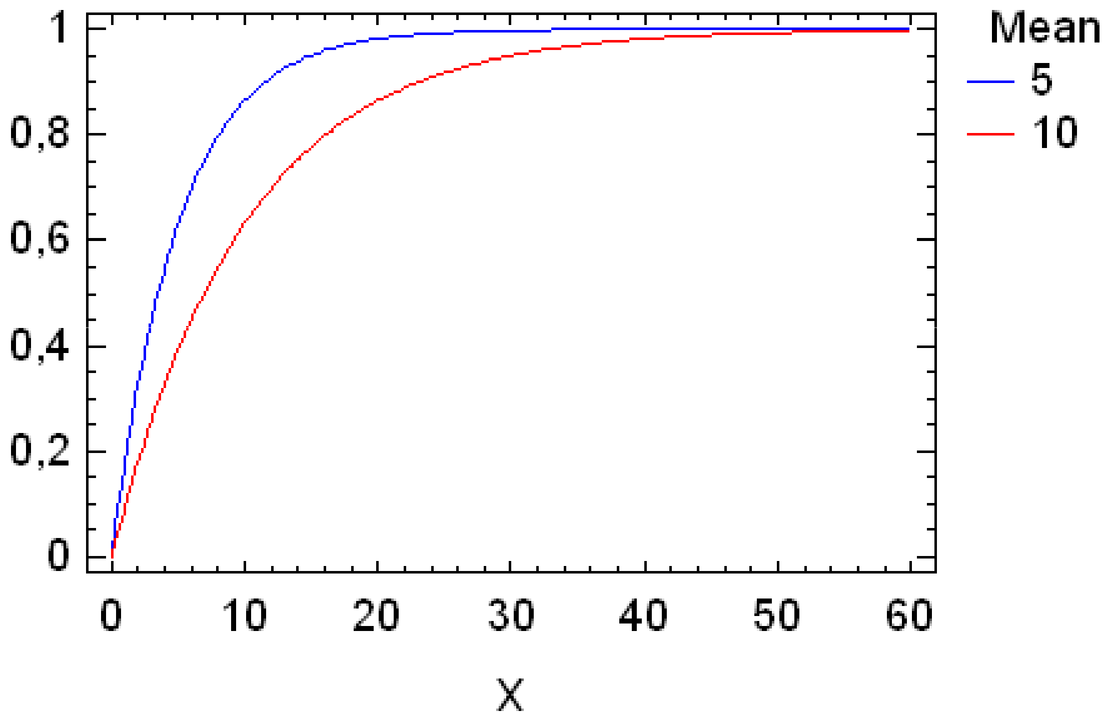
$$= \frac{-a}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2}$$

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti E(λ)



Ukázka průběhu hustoty pravděpodobnosti exponenciální náhodné proměnné.

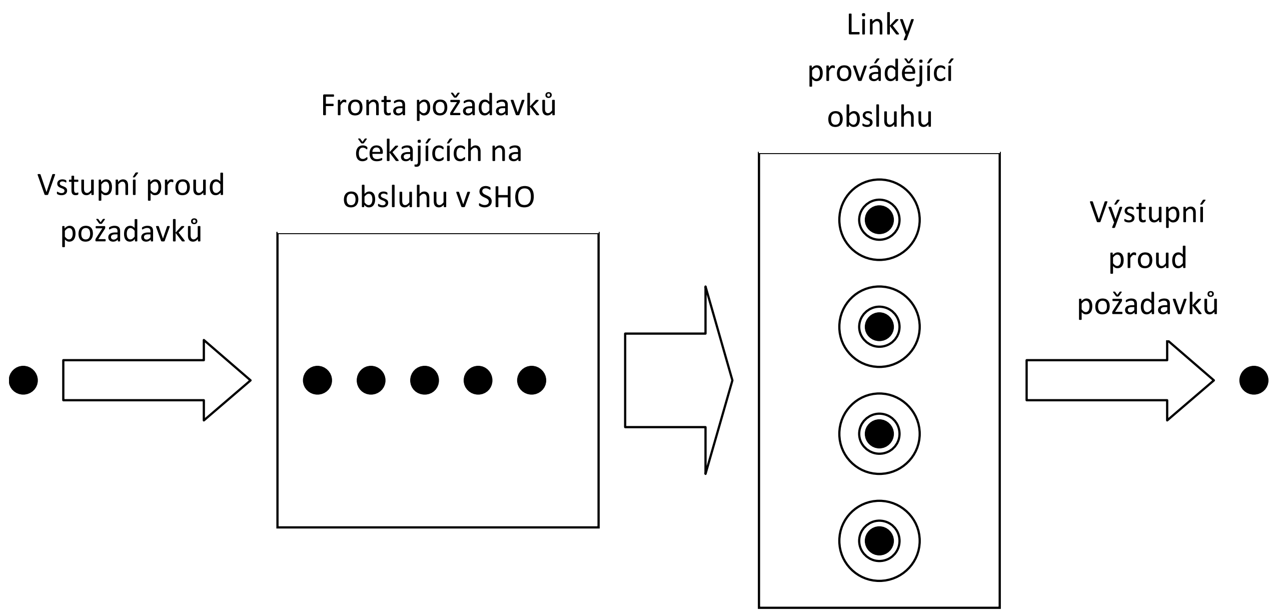
Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti E(λ)



Ukázka průběhu distribuční funkce exponenciální náhodné proměnné.

Systémy hromadné obsluhy

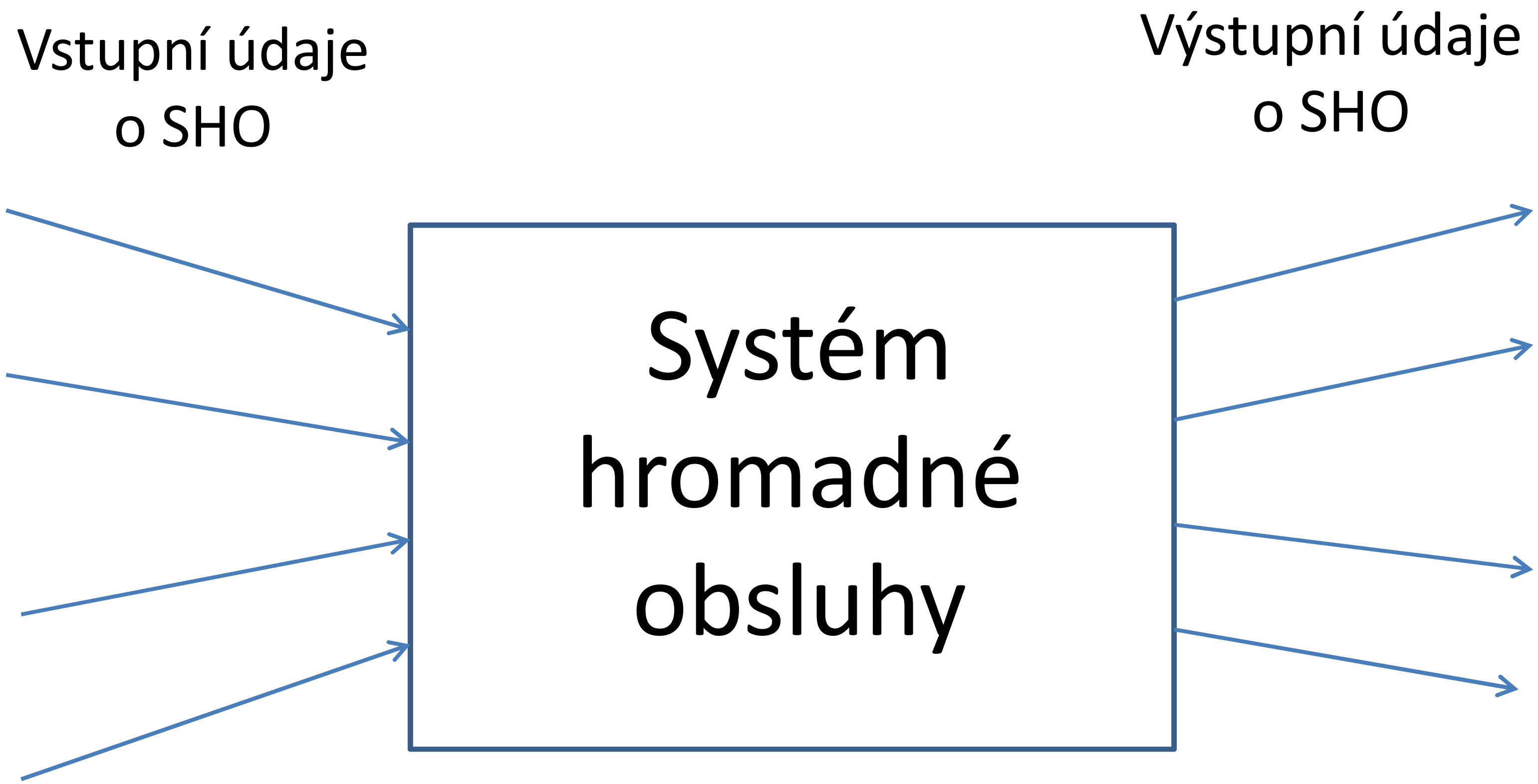
- Za systém hromadné obsluhy (SHO) lze považovat každý systém, k němuž přicházejí požadavky na obsluhu v systému.



Systémy hromadné obsluhy

- SHO lze členit podle mnoha kritérií, rozeznáváme např.:
  - Systémy bez fronty a systémy tvořící frontu.
  - Systémy tvořící frontu lze rozdělit na systémy s neomezenou nebo omezenou délkou fronty.
  - Systémy tvořící frontu lze dále rozdělit podle frontového režimu – FIFO, LIFO, PRI.
  - Systémy s paralelně, sériově nebo kombinovaně řazenými linkami.
  - Systémy se spolehlivými linkami a systémy s nespolehlivými linkami.

Systémy hromadné obsluhy



Systémy hromadné obsluhy

- Každý SHO lze charakterizovat několika faktory:
  - Charakter vstupního toku zákazníků.
  - Charakter obsluhy.
  - Počet obslužných linek a jejich uspořádání.
  - Kapacita fronty a frontový režim (pokud SHO umožňuje tvorbu fronty).
- Tyto údaje představují oblast vstupních dat (potřebujeme je znát, abychom mohli SHO matematicky modelovat).

Systémy hromadné obsluhy

- U daného SHO nás zajímá např.:
  - Procento odmítnutých zákazníků, resp. pravděpodobnost odmítnutí zákazníka P_{ODM}.
  - Využití obslužných linek κ.
  - Střední počet zákazníků v systému *EK*.
  - Střední počet zákazníků v obsluze *ES*.
  - Střední počet zákazníků ve frontě *EL*.
- Tyto údaje představují oblast výstupních dat (tedy to, co chceme řešením matematického modelu SHO získat).

Systémy hromadné obsluhy

- SHO se pro názornost označují dle Kendallovy klasifikace SHO:

$$X \,/\, Y \,/\, n \,/\, m,$$

kde: X vyjadřuje pravděpodobnostní rozdělení příchodu zákazníků k SHO,

Y vyjadřuje pravděpodobnostní rozdělení, kterým se řídí doba trvání obsluhy zákazníka,

n označuje počet obslužných linek v SHO,

m označuje celkový počet míst v SHO.

Systémy hromadné obsluhy

	Pozice X	Pozice Y
M	exponenciální doby mezi příchody (elementární vstupní tok)	exponenciální doba obsluhy
E_k	Erlangovo rozdělení dob mezi příchody	Erlangovo rozdělení doby obsluhy
D	konstantní doby mezi příchody	konstantní doba obsluhy
G	obecné rozdělení dob mezi příchody	obecné rozdělení doby obsluhy

Systémy hromadné obsluhy

- Budeme se zabývat systémy:
  - Vstupní tok zákazníků bude elementární.
  - Doba obsluhy zákazníka bude exponenciální náhodná proměnná.
  - U systémů tvořících frontu budeme uvažovat FIFO režim výběru zákazníků z fronty.
  - Obslužné linky budou řazeny paralelně, budou homogenní a nebudeme uvažovat možnost jejich poruchy.

Elementární vstupní tok

- **Elementární vstupní tok** je takový tok, který splňuje tři základní vlastnosti:
  - Stacionárnost, beznáslednost a ordinárnost.
- **Stacionárnost** (neměnnost stochastického režimu): Počet zákazníků, kteří přicházejí k SHO za čas t, závisí pouze na délce tohoto intervalu a nezávisí na jeho poloze na časové ose.

Elementární vstupní tok

- **Beznáslednost** (neexistence následných účinků): Počet zákazníků, kteří přijdou k SHO za čas *t*, nezávisí na počtu zákazníků, kteří k SHO přišli před začátkem tohoto časového intervalu.
- **Ordinárnost**: Zákazníci přicházejí k SHO jednotlivě.

Elementární vstupní tok

- Pro elementární vstupní tok platí:
  - Pravděpodobnost $p_k(t)$, tedy že za čas *t* přijde k SHO *k* zákazníků, je rovna:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad \text{pro } \lambda > 0, t > 0, k = 0,1,2,\ldots,$$

$$p_k(t) = 0 \qquad \text{jinde.}$$

- Elementární vstupní tok je tedy Poissonův, mezery mezi příchody zákazníků k SHO jsou exponenciální.

Funkce řádu *o*(*x*)

- Funkce *f*(*x*) je řádu *o*(*x*), pokud platí:
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 .$$

- Budeme tak označovat řád zanedbatelné funkce, která nemá podstatný vliv na hodnotu výsledku. Součtem, násobením, umocněním nebo násobením konstantou funkce řádu *o*(*x*) dostaneme opět funkci řádu *o*(*x*).

Funkce řádu *o*(*x*)

- Např.

$$f(x)=x \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1\neq 0$$ – funkce není řádu *o*(*x*).

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$ – funkce je řádu *o*(*x*).

$$o(x)+o(x)=o(x)$$

$$f(x)=x^2,\; g(x)=x^3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x}=0$$

$$o(x)\cdot o(x)=o(x)$$

$$f(x)=x^2,\; g(x)=x^3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^3}{x}=0$$

Přechodové pravděpodobnosti

- Uvažujme krátký časový okamžik $\Delta t \rightarrow 0$.
  - Pravděpodobnost, že za čas Δt přijde k systému právě 1 zákazník, je rovna:

$$p_1(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^1}{1!} \cdot e^{-\lambda \Delta t^*} = \lambda \Delta t \cdot [1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)] = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

$$* \, e^{-\lambda t} = \frac{(-\lambda t)^0}{0!} + \frac{(-\lambda t)^1}{1!} + \frac{(-\lambda t)^2}{2!} + \frac{(-\lambda t)^3}{3!} \ldots =$$

$$= 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2} - \frac{(\lambda t)^3}{6} + \ldots$$

Přechodové pravděpodobnosti

- Uvažujme krátký časový okamžik $\Delta t \rightarrow 0$.
  - Pravděpodobnost, že za čas Δt přijdou k systému alespoň 2 zákazníci, je rovna:

    $$w(\Delta t) = o(\Delta t),$$

    neboť elementární vstupní tok je ordinární.

Přechodové pravděpodobnosti

– Pravděpodobnost, že exponenciální obsluha požadavku s parametrem μ, která započala před časem t, skončí během časového intervalu (t, $t + \Delta t$), je rovna:

$$P(t \le T < t + \Delta t | T \ge t) = \frac{P(t \le T < t + \Delta t)}{P(T \ge t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\mu(t + \Delta t)} - (1 - e^{-\mu t})}{1 - (1 - e^{-\mu t})} = \frac{e^{-\mu t} - e^{-\mu t} \cdot e^{-\mu \Delta t}}{e^{-\mu t}} = 1 - e^{-\mu \Delta t} =$$

$$= 1 - \left[\frac{(-\mu \Delta t)^0}{0!} + \frac{(-\mu \Delta t)^1}{1!} + \frac{(-\mu \Delta t)^2}{2!} + \dots \right] = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Přechodové pravděpodobnosti

– Uvažujme, že v obsluze je *k* zákazníků, kde *k* = 1,2,…,*n*. Pravděpodobnost, že za čas *Δt* skončí obsluha jednoho zákazníka, je rovna:

$$u_1(\Delta t) = k\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

protože pravděpodobnost odchodu (ukončení obsluhy) jednoho zákazníka je rovna $\mu\Delta t + o(\Delta t)$, v obsluze se nachází *k* zákazníků, pravděpodobnost odchodu každého z nich je stejná a jevy odpovídající odchodům jednotlivých zákazníků jsou disjunktní, pravděpodobnosti se tedy sčítají.

Přechodové pravděpodobnosti

– Pravděpodobnost, že za čas *Δt* nastane více než 1 událost (dva a více příchodů, dva a více odchodů, příchod a odchod apod.), je **vždy rovna o(*Δt*)**. Jinými slovy, za čas *Δt* může dojít maximálně k jedné události.

M/M/*n*/*n* SHO

- Systém je tvořen *n* paralelně řazenými homogenními linkami.
- Systém nepřipouští tvorbu fronty čekajících zákazníků na obsluhu, je-li systém plný, jsou přicházející zákazníci odmítáni.

M/M/*n*/*n* SHO

- Vstupní tok je elementární s intenzitou λ.
  - Střední počet zákazníků, kteří přicházejí k SHO za jednotku času je tedy roven λ.
  - Jelikož je vstupní tok elementární (tedy Poissonův), jsou doby mezi příchody po sobě jdoucích zákazníků exponenciální náhodnou proměnnou s parametrem λ. Převrácená hodnota tohoto parametru je rovna střední době mezi příchody zákazníků k systému.

M/M/*n*/*n* SHO

- Doba obsluhy zákazníka je exponenciální náhodná proměnná s parametrem μ.
  - Parametr μ nazýváme **parametrem obsluhy** a udává, kolik zákazníků je průměrně schopna 1 linka obsloužit za jednotku času, převrácená hodnota tohoto parametru udává střední dobu obsluhy jednoho zákazníka.
  - Parametr $n\mu$ nazýváme **parametrem systému** a udává, kolik zákazníků za jednotku času je systém schopen průměrně obsloužit.

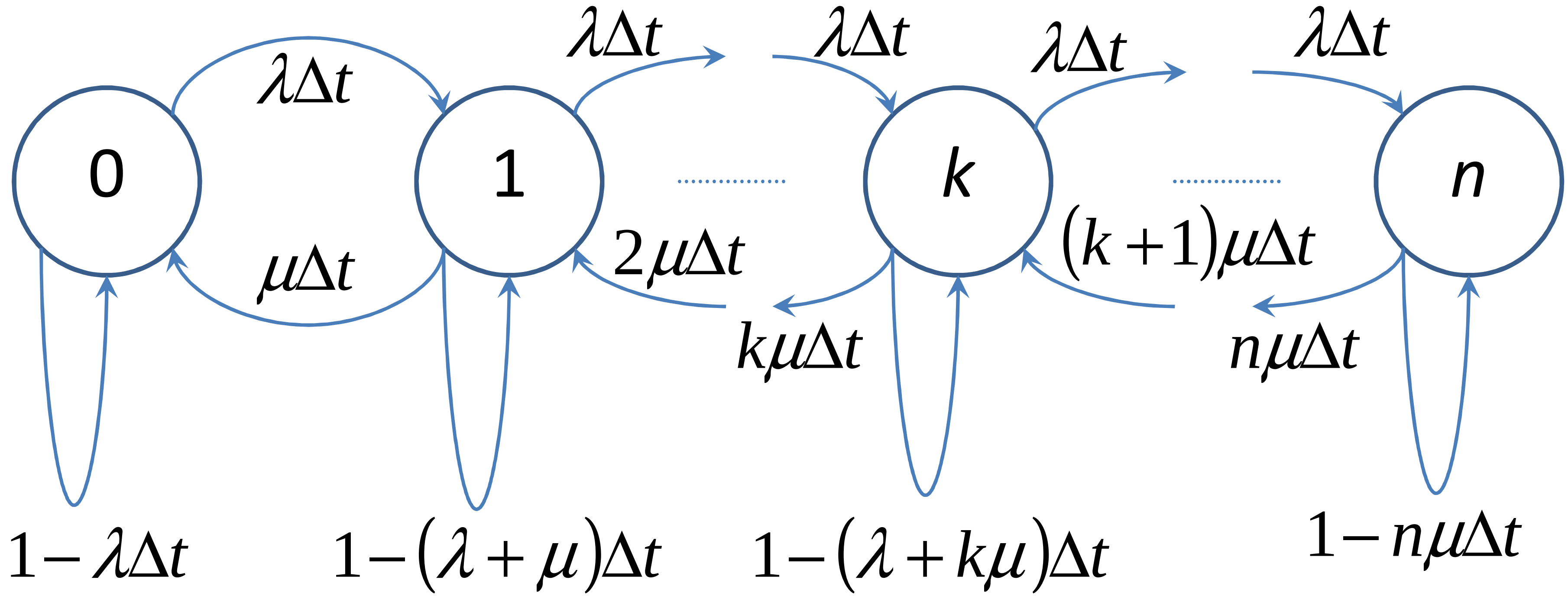
M/M/*n*/*n* SHO

- Nyní nás například zajímá, jaký je střední počet zákazníků v systému – EK. Jelikož náhodnou proměnnou je počet zákazníků v systému, který je diskrétní, můžeme psát:

$$EK = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P_k \, .$$

- Z uvedeného vztahu je zřejmé, že k výpočtu potřebujeme znát pravděpodobnosti, že v systému se nachází *k* zákazníků pro *k* = 0,1,...,*n*. Ty stanovíme postupem, který si ukážeme dále.

Přechodový graf M/M/*n*/*n* SHO



Vrcholy grafu představují stav systému (počet zákazníků v systému), hrany představují možné změny stavu systému za čas *Δt* (resp. setrvání systému v daném stavu v případě smyček) a ohodnocení hran představuje pravděpodobnost přechodu, resp. setrvání.

Přechodový graf M/M/n/n SHO

- Z přechodového grafu vidíme, že se systém může nacházet v následujících stavech:
  - 0 – systém je prázdný (v systému se nenachází žádný zákazník).
  - 1 – v systému se nachází 1 zákazník – tento zákazník je obsluhován.
  - k – v systému (a tedy i v obsluze) se nachází k zákazníků, kde $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.
  - n – v systému (a tedy i v obsluze) se nachází n zákazníků, systém je zaplněn.

Chapman-Kolmogorova rovnice

- Aby se systém v čase $t + \Delta t$ nacházel v nějakém stavu j, mohl se nacházet v čase t v libovolném definovaném stavu k a za čas Δt musel přejít ze stavu k do stavu j.

  $$P_j(t+\Delta t)=\sum_{k\in S} P_k(t)\cdot P_{k,j}(\Delta t),$$

  kde S je množina všech možných stavů systému, $P_k(t)$ je pravděpodobnost, že se systém v čase t nacházel ve stavu k a $P_{k,j}(\Delta t)$ je pravděpodobnost přechodu systému ze stavu k do stavu j za čas Δt.

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

- Na základě přechodového grafu a Chapman-Kolmogorovy rovnice můžeme psát soustavu rovnic:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\cdot\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_1(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot\lambda\Delta t + P_1(t)\cdot[1-(\lambda+\mu)\Delta t] + P_2(t)\cdot 2\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1:$$

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t + P_k(t)\cdot[1-(\lambda+k\mu)\Delta t] + P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\vdots$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t + P_n(t)\cdot(1-n\mu\Delta t) + o(\Delta t).$$

Analytické řešení M/M/n/n SHO

- Soustavu rovnic upravíme pomocí následujícího postupu:
  - Na pravé straně rovnice vynásobíme jedničkou pravděpodobnost se stejným indexem jako na levé straně.
  - Tuto pravděpodobnost převedeme na levou stranu rovnice.
  - Celou rovnici vydělíme výrazem Δt.
  - Vykonáme limitu pro $\Delta t \to 0$.

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)-P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)\cdot\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P_1(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)\Delta t+P_2(t)\cdot 2\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k=1,2,\dots,n-1:$$

$$P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_k(t)-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_n(t)-P_n(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

$$P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)\cdot\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P_1(t+\Delta t)-P_1(t)=P_0(t)\cdot\lambda\Delta t-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)\Delta t+P_2(t)\cdot 2\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k=1,2,\ldots,n-1:$$

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_n(t+\Delta t)-P_n(t)=P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t-P_n(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-P_0(t)\cdot\lambda+P_1(t)\cdot\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=P_0(t)\cdot\lambda-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)+P_2(t)\cdot 2\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

pro $k=1,2,\ldots,n-1$:

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{k-1}(t)\cdot\lambda-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=P_{n-1}(t)\cdot\lambda-P_n(t)\cdot n\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t)\cdot\lambda + P_1(t)\cdot\mu + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1(t+\Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = P_0(t)\cdot\lambda - P_1(t)\cdot(\lambda+\mu) + P_2(t)\cdot 2\mu + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1:$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = P_{k-1}(t)\cdot\lambda - P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu) + P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\cdot\lambda - P_n(t)\cdot n\mu + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

$$P_0'(t) = -P_0(t)\cdot\lambda + P_1(t)\cdot\mu$$

$$P_1'(t) = P_0(t)\cdot\lambda - P_1(t)\cdot(\lambda+\mu) + P_2(t)\cdot 2\mu$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1:$$

$$P_k'(t) = P_{k-1}(t)\cdot\lambda - P_k(t)\cdot(\lambda + k\mu) + P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu$$

$$\vdots$$

$$P_n'(t) = P_{n-1}(t)\cdot\lambda - P_n(t)\cdot n\mu$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1$$

Normativní podmínka pravděpodobnosti, která vyjadřuje, že se systém v čase *t* může nacházet pouze v některém z definovaných stavů.

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

- Získanou soustavu diferenciálních rovnic (dynamický popis SHO) převedeme na soustavu lineárních rovnic (statický popis SHO) aplikací Markovovy věty.
- **Markovova věta**:

$$\lim_{t \to \infty} P_k(t) = P_k \text{ pro } k = 0,1,2,\ldots,n.$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

$$
\begin{aligned}
&0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \\
&0 = \lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2 \\
&\vdots \\
&\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1: \\
&0 = \lambda P_{k-1} - (\lambda + k\mu) P_k + (k+1)\mu P_{k+1} \\
&\vdots \\
&0 = \lambda P_{n-1} - n\mu P_n
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&0 = -(\lambda P_0 - \mu P_1) \\
&0 = (\lambda P_0 - \mu P_1) - (\lambda P_1 - 2\mu P_2) \\
&\vdots \\
&\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1: \\
&0 = (\lambda P_{k-1} - k\mu P_k) - [\lambda P_k - (k+1)\mu P_{k+1}] \\
&\vdots \\
&0 = (\lambda P_{n-1} - n\mu P_n)
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1 \quad \Leftarrow$$

Normativní podmínka pravděpodobnosti, která vyjadřuje, že se systém může nacházet pouze v některém z definovaných stavů.

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

Substituce: $z_k = \lambda P_{k-1} - k\mu P_k$ pro $k = 1,2,\ldots,n$

$$
\begin{aligned}
0 &= -\left(\lambda P_0 - \mu P_1\right) \\
0 &= \left(\lambda P_0 - \mu P_1\right) - \left(\lambda P_1 - 2\mu P_2\right) \\
&\vdots \\
&\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1: \\
0 &= \left(\lambda P_{k-1} - k\mu P_k\right) - \left[\lambda P_k - (k+1)\mu P_{k+1}\right] \\
&\vdots \\
0 &= \left(\lambda P_{n-1} - n\mu P_n\right)
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
0 &= -z_1 \\
0 &= z_1 - z_2 \\
&\vdots \\
&\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1: \\
0 &= z_k - z_{k+1} \\
&\vdots \\
0 &= z_n
\end{aligned}
$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

$$0 = -z_1$$
$$0 = z_1 - z_2$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1:$$
$$0 = z_k - z_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$0 = z_n$$

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_k = \ldots = z_n = 0$$

Tedy platí, že $0 = \lambda P_{k-1} - k\mu P_k$ pro $k = 1,2,\ldots,n$.

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = 1,2,\ldots,n$$

Rekurentní vzorec, pomocí kterého jsme schopni spočítat pravděpodobnost určitého stavu *k* na základě pravděpodobnosti stavu *k* – 1.

Analytické řešení M/M/n/n SHO

- Nyní bychom potřebovali vyjádřit vztahy pro výpočet pravděpodobností jednotlivých stavů k pomocí pravděpodobnosti stavu 0, chceme tedy vyjádřit závislost P_k pro $k = 1,2,\ldots,n$ na P_0. K tomu využijeme rekurentní vzorec, který jsme si odvodili v předchozím postupu.

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

$$P_1 = \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$\vdots$$

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \text{ pro } k = 1,2,\ldots,n$$

Pomocí tohoto vztahu jsme schopni spočítat všechny pravděpodobnosti kromě pravděpodobnosti P_0, kterou odvodíme z normativní podmínky pravděpodobnosti

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1.$$

Erlangův vzorec

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_k + \ldots + P_n = 1$$

$$\frac{1}{0!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 P_0 + \frac{1}{1!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$$

$$P_0 \cdot \left[\frac{1}{0!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \frac{1}{1!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] = 1$$

$$P_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

Erlangův vzorec

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

- Pravděpodobnost odmítnutí zákazníka P_{ODM}:
  - Přicházející zákazník bude odmítnut, najde-li v okamžiku svého příchodu systém plný, tedy ve stavu *n*. Pro pravděpodobnost odmítnutí tedy platí:

$$P_{ODM} = P_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 = \frac{\frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k}.$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

- Střední počet zákazníků v systému *EK* stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou K je počet zákazníků v systému. Tedy platí:

$$EK=\sum_{k=0}^{n}kP_k=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}P_0=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{k\cdot(k-1)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}P_0=\frac{\lambda}{\mu}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1}P_0=$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left[\frac{1}{0!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{0}P_0+\frac{1}{1!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{1}P_0+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}P_0\right]=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left(P_0+P_1+\ldots+P_{n-1}\right)=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left(1-P_n\right).$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

- Střední počet zákazníků v obsluze *ES* stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou S je počet zákazníků v obsluze. Jelikož u tohoto systému platí, že počet zákazníků v systému se rovná počtu zákazníků v obsluze, můžeme psát:

$$ES = EK = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_n).$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

- Střední počet zákazníků ve frontě *EL* opět stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou L je počet zákazníků ve frontě. Jelikož tento systém netvoří frontu (počet zákazníků ve frontě je pořád roven 0), platí:

$$EL = 0.$$

Analytické řešení M/M/*n*/*n* SHO

- Využití obslužných linek (systému) κ stanovíme na základě následující úvahy. Systém průměrně obsluhuje *ES* zákazníků a je schopen obsluhovat *n* zákazníků, tedy platí:

$$\kappa = \frac{ES}{n} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_n)}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot (1 - P_n) = \rho \cdot (1 - P_n),$$

kde ρ nazýváme intenzitou provozu.

M/M/*n*/∞ SHO

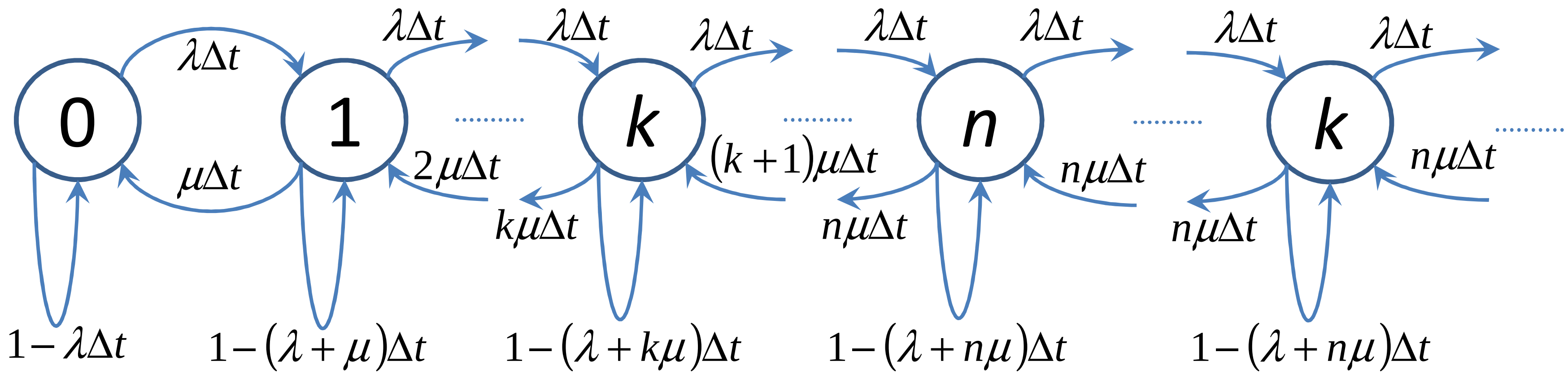
- Systém je tvořen *n* paralelně řazenými homogenními linkami.
- Systém připouští tvorbu fronty čekajících zákazníků na obsluhu, přicházející zákazník nachází vždy volné místo v systému, systém tedy neodmítá zákazníky (v systému se může teoreticky nacházet ∞ zákazníků).
- Aby byl systém stabilní, musí platit:

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1\,.$$

M/M/n/∞ SHO

- Vstupní tok je elementární s intenzitou λ.
- Doba obsluhy zákazníka je exponenciální náhodná proměnná s parametrem μ.

Přechodový graf M/M/*n*/∞ SHO



Přechodový graf M/M/*n*/∞ SHO

- Systém se může nacházet ve stavech:
  - 0 – systém je prázdný.
  - 1 – v systému je 1 zákazník – 1 v obsluze, 0 ve frontě.
  - *k* – v systému se nachází *k* zákazníků, kde *k* = 1, 2,…, *n* – 1; *k* zákazníků je v obsluze, 0 ve frontě.
  - *n* – v systému je *n* zákazníků, všichni jsou v obsluze, fronta je prázdná.
  - *k* – v systému je *k* zákazníků, kde *k* = n + 1,…; *n* zákazníků je v obsluze a *k* – *n* ve frontě.

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\cdot\mu\Delta t + o(\Delta t)$$
$$P_1(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot\lambda\Delta t + P_1(t)\cdot[1-(\lambda+\mu)\Delta t] + P_2(t)\cdot 2\mu\Delta t + o(\Delta t)$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1:$$
$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t + P_k(t)\cdot[1-(\lambda+k\mu)\Delta t] + P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu\Delta t + o(\Delta t)$$
$$\vdots$$
$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t + P_n(t)\cdot[1-(\lambda+n\mu)\Delta t] + P_{n+1}(t)\cdot n\mu\Delta t + o(\Delta t)$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k = n+1, n+2,\ldots:$$
$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t + P_k(t)\cdot[1-(\lambda+n\mu)\Delta t] + P_{k+1}(t)\cdot n\mu\Delta t + o(\Delta t)$$
$$\vdots$$

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

- Soustavu rovnic upravíme opět pomocí stejného postupu:
  - Na pravé straně rovnice vynásobíme jedničkou pravděpodobnost se stejným indexem jako na levé straně.
  - Tuto pravděpodobnost převedeme na levou stranu rovnice.
  - Celou rovnici vydělíme výrazem Δt.
  - Vykonáme limitu pro $\Delta t \to 0$.

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)-P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)\cdot\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P_1(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)\Delta t+P_2(t)\cdot 2\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

pro $k=1,2,\dots,n-1$:

$$P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_k(t)-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_n(t)-P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu)\Delta t+P_{n+1}(t)\cdot n\mu\Delta+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

pro $k=n+1,n+2,\dots$:

$$P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_k(t)-P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot n\mu\Delta+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

$$P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)\cdot\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P_1(t+\Delta t)-P_1(t)=P_0(t)\cdot\lambda\Delta t-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)\Delta t+P_2(t)\cdot 2\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k=1,2,\ldots,n-1:$$

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_n(t+\Delta t)-P_n(t)=P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t-P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu)\Delta t+P_{n+1}(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k=n+1,n+2,\ldots:$$

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t-P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-P_0(t)\cdot\lambda+P_1(t)\cdot\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=P_0(t)\cdot\lambda-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)+P_2(t)\cdot 2\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$\vdots$

pro $k=1,2,\ldots,n-1$:

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{k-1}(t)\cdot\lambda-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$\vdots$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=P_{n-1}(t)\cdot\lambda-P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu)+P_{n+1}(t)\cdot n\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$\vdots$

pro $k=n+1,n+2,\ldots$:

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{k-1}(t)\cdot\lambda-P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu)+P_{k+1}(t)\cdot n\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$\vdots$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-P_0(t)\cdot\lambda+P_1(t)\cdot\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=P_0(t)\cdot\lambda-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)+P_2(t)\cdot 2\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

pro $k=1,2,\ldots,n-1$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{k-1}(t)\cdot\lambda-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=P_{n-1}(t)\cdot\lambda-P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu)+P_{n+1}(t)\cdot n\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

pro $k=n+1,n+2,\ldots$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{k-1}(t)\cdot\lambda-P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu)+P_{k+1}(t)\cdot n\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

$$P_0'(t) = -P_0(t)\cdot\lambda + P_1(t)\cdot\mu$$

$$P_1'(t) = P_0(t)\cdot\lambda - P_1(t)\cdot(\lambda+\mu) + P_2(t)\cdot 2\mu$$

$$\vdots$$

pro $k = 1,2,\ldots,n-1$:

$$P_k'(t) = P_{k-1}(t)\cdot\lambda - P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu) + P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu$$

$$\vdots$$

$$P_n'(t) = P_{n-1}(t)\cdot\lambda - P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu) + P_{n+1}(t)\cdot n\mu$$

$$\vdots$$

pro $k = n+1, n+2,\ldots$:

$$P_k'(t) = P_{k-1}(t)\cdot\lambda - P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu) + P_{k+1}(t)\cdot n\mu$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

Normativní podmínka pravděpodobnosti, která vyjadřuje, že se systém v čase *t* může nacházet pouze v některém z definovaných stavů.

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

- Získanou soustavu diferenciálních rovnic (dynamický popis SHO) opět převedeme na soustavu lineárních rovnic (statický popis SHO).

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

$$0=-\lambda P_0+\mu P_1$$
$$0=\lambda P_0-(\lambda+\mu)P_1+2\mu P_2$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k=1,2,\ldots,n-1:$$
$$0=\lambda P_{k-1}-(\lambda+k\mu)P_k+(k+1)\mu P_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$0=\lambda P_{n-1}-(\lambda+n\mu)P_n+n\mu P_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k=n+1,n+2,\ldots:$$
$$0=\lambda P_{k-1}-(\lambda+n\mu)P_k+n\mu P_{k+1}$$
$$\vdots$$

$$0=-(\lambda P_0-\mu P_1)$$
$$0=(\lambda P_0-\mu P_1)-(\lambda P_1-2\mu P_2)$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k=1,2,\ldots,n-1:$$
$$0=(\lambda P_{k-1}-k\mu P_k)-[\lambda P_k-(k+1)\mu P_{k+1}]$$
$$\vdots$$
$$0=(\lambda P_{n-1}-n\mu P_n)-(\lambda P_n-n\mu P_{n+1})$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k=n+1,n+2,\ldots:$$
$$0=(\lambda P_{k-1}-n\mu P_k)-(\lambda P_k-n\mu P_{k+1})$$
$$\vdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k=1$$

Normativní podmínka pravděpodobnosti, která vyjadřuje, že se systém může nacházet pouze v některém z definovaných stavů.

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

Substituce:
$$z_k = \lambda P_{k-1} - k\mu P_k \text{ pro } k = 1,2,\ldots,n$$
$$z_k = \lambda P_{k-1} - n\mu P_k \text{ pro } k = n, n+1,\ldots$$

$$0 = -(\lambda P_0 - \mu P_1)$$
$$0 = (\lambda P_0 - \mu P_1) - (\lambda P_1 - 2\mu P_2)$$
$$\vdots$$
pro $k = 1,2,\ldots,n-1$:
$$0 = (\lambda P_{k-1} - k\mu P_k) - [\lambda P_k - (k+1)\mu P_{k+1}]$$
$$\vdots$$
$$0 = (\lambda P_{n-1} - n\mu P_n) - (\lambda P_n - n\mu P_{n+1})$$
$$\vdots$$
pro $k = n+1, n+2,\ldots$:
$$0 = (\lambda P_{k-1} - n\mu P_k) - (\lambda P_k - n\mu P_{k+1})$$
$$\vdots$$

$$\Rightarrow$$

$$0 = -z_1$$
$$0 = z_1 - z_2$$
$$\vdots$$
pro $k = 1,2,\ldots,n-1$:
$$0 = z_k - z_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$0 = z_n - z_{n+1}$$
$$\vdots$$
pro $k = n+1, n+2,\ldots$:
$$0 = z_k - z_{k+1}$$
$$\vdots$$

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

$$0 = -z_1$$
$$0 = z_1 - z_2$$
$$\vdots$$
pro $k = 1,2,\dots,n-1$:
$$0 = z_k - z_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$0 = z_n - z_{n+1}$$
$$\vdots$$
pro $k = n+1, n+2,\dots$:
$$0 = z_k - z_{k+1}$$
$$\vdots$$

$$z_1 = z_2 = \dots = z_k = \dots = z_n = \dots = z_k = \dots = 0$$

Tedy platí, že $0 = \lambda P_{k-1} - k\mu P_k$ pro $k = 1,2,\dots,n$

a $0 = \lambda P_{k-1} - n\mu P_k$ pro $k = n, n+1,\dots.$

Rekurentní vzorce pro výpočet P_k pomocí $P_{k\text{-}1}$.

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = 1,2,\dots,n$$

$$P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = n, n+1,\dots$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

- Nyní bychom opět potřebovali vyjádřit vztahy pro výpočet pravděpodobností jednotlivých stavů k pomocí pravděpodobnosti stavu 0, chceme tedy vyjádřit závislost P_k pro $k = 1,2,\ldots,n,\ldots$ na P_0. K tomu využijeme rekurentní vzorce, které jsme si odvodili v předchozím postupu.

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

$$P_1 = \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$\vdots$$

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \text{ pro } k = 1,2,\ldots,n$$

Vztah pro výpočet P_k pomocí P_0, vztah platí pouze pro k = 1,2,…,n!!!

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

$$\text{Víme}: P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = n, n+1, \ldots \text{ a } P_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} P_n$$

$$P_{n+2} = \frac{\lambda}{n\mu} P_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{\lambda}{n\mu} P_n = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^2 P_n$$

$$\vdots$$

$$P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} P_n = \rho^{k-n} P_n \text{ pro } k = n, n+1, \ldots$$

Vztah pro výpočet P_k pomocí P_n, platí pouze pro $k = n, \ldots$!!!

$$P_k = \rho^{k-n} P_n = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{1}{n^{k-n} \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \text{ pro } k = n, n+1, \ldots$$

Vztah pro výpočet P_k pomocí P_0, platí pouze pro $k = n, \ldots$!!!

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

Pravděpodobnost P_0 opět stanovíme z normativní podmínky pravděpodobnosti.

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_k + \ldots + P_n + P_{n+1} + \ldots = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 = 1$$

$$P_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + P_0 \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{\rho}{1-\rho}} \text{ pro } \rho < 1$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^{k-n} =$$

$$= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots = \frac{\rho}{1-\rho} \text{ pro } \rho < 1$$

Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = \rho$ a kvocientem $q = \rho$, pro součet nekonečné geometrické řady platí:

$$s = \frac{a_1}{1-q} \text{ pro } |q| < 1.$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

- Pravděpodobnost odmítnutí zákazníka P_{ODM}:
  - Přicházející zákazník nebude nikdy odmítnut, najde-li v okamžiku svého příchodu některou z linek neobsazenou, začíná ihned jeho obsluha, v opačném případě se řadí do fronty, jejíž délka není nijak omezena:

$$P_{ODM} = 0.$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

- Střední počet zákazníků v obsluze *ES* stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou S je počet zákazníků v obsluze. Tedy platí:

$$ES = \sum_{s=0}^{n} sP_s = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + n\sum_{k=n}^{\infty} P_k \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 + n\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} P_n \overset{**}{=}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(P_0 + P_1 + \ldots + P_{n-2} + P_{n-1} + P_n + P_{n+1} + \ldots\right) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

$$*\sum_{k=0}^{n-1} k\cdot\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k} P_0=\frac{\lambda}{\mu}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} P_0=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left(P_0+P_1+\ldots+P_{n-2}\right).$$

$$**n\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} P_n=nP_n+n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} P_n=n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} P_0+n\cdot\frac{\lambda}{n\mu}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n-1} P_n=$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} P_0+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n-1} P_n=\frac{\lambda}{\mu}\cdot P_{n-1}+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left[\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{0} P_n+\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{1} P_n+\ldots\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}\cdot P_{n-1}+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left(P_n+P_{n+1}+\ldots\right)=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left(P_{n-1}+P_n+P_{n+1}+\ldots\right)$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

- Střední počet zákazníků ve frontě *EL* opět stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou L je počet zákazníků ve frontě. Můžeme tedy psát:

$$EL=\sum_{l=0}^{\infty} lP_l = 0\cdot\sum_{k=0}^{n} P_k+\sum_{l=1}^{\infty} lP_{n+l}=\sum_{l=1}^{\infty} l\rho^l P_n=\rho P_n\cdot\sum_{l=1}^{\infty} l\rho^{l-1}=$$

$$=\rho P_n\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^l=\rho P_n\cdot\frac{d}{d\rho}\sum_{l=1}^{\infty}\rho^l=\rho P_n\cdot\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\cdot P_n\,.$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\rho^l=\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots=\frac{\rho}{1-\rho}$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

- Střední počet zákazníků v systému *EK* je roven součtu středního počtu požadavků v obsluze a středního počtu požadavků ve frontě. Můžeme tedy psát:

$$EK = ES + EL = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_n \, .$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

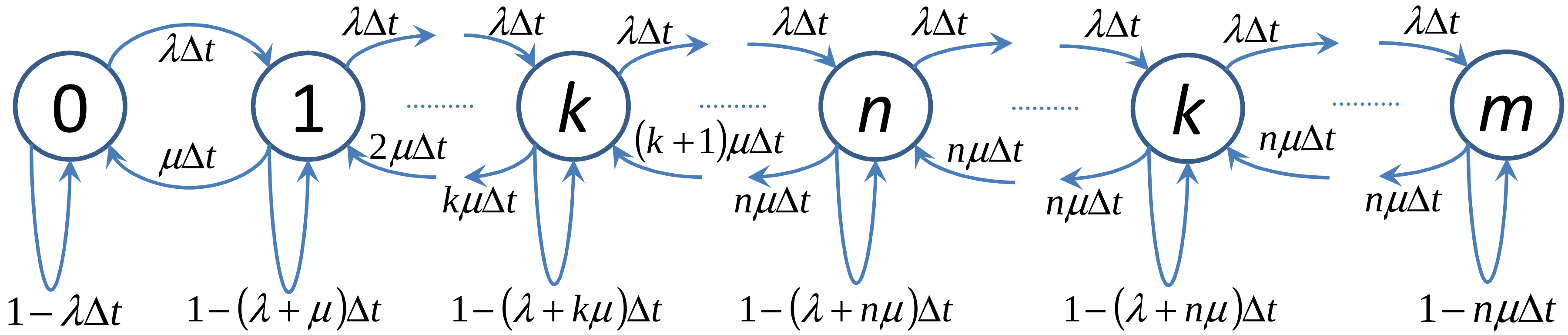
- Využití obslužných linek (systému) κ stanovíme na základě následující úvahy. Systém průměrně obsluhuje ES zákazníků a je schopen obsluhovat n zákazníků, tedy platí:

$$\kappa = \frac{ES}{n} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} = \rho .$$

M/M/n/m SHO

- Systém je tvořen n paralelně řazenými homogenními linkami.
- Systém připouští tvorbu fronty zákazníků čekajících na obsluhu, délka fronty je omezena na $(m - n)$ míst. Nachází-li příchozí zákazník v systému m zákazníků, je odmítnut.
- Vstupní tok je elementární s intenzitou λ.
- Doba obsluhy zákazníka je exponenciální náhodná proměnná s parametrem μ.

Přechodový graf M/M/*n*/*m* SHO



Přechodový graf M/M/n/∞ SHO

- Systém se může nacházet ve stavech:
  - 0 – systém je prázdný.
  - 1 – v systému je 1 zákazník – 1 v obsluze, 0 ve frontě.
  - k – v systému se nachází k zákazníků, kde k = 1, 2,…, n – 1; k zákazníků je v obsluze, 0 ve frontě.
  - n – v systému je n zákazníků, všichni jsou v obsluze, fronta je prázdná.
  - k – v systému je k zákazníků, kde k = n + 1,…, m - 1; n zákazníků je v obsluze a k – n ve frontě.
  - m – v systému je m zákazníků; n zákazníků je v obsluze a m – n ve frontě.

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\cdot\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P_1(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)\cdot[1-(\lambda+\mu)\Delta t]+P_2(t)\cdot 2\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k=1,2,\dots,n-1:$$

$$P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_k(t)\cdot[1-(\lambda+k\mu)\Delta t]+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_n(t)\cdot[1-(\lambda+n\mu)\Delta t]+P_{n+1}(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k=n+1,n+2,\dots,m-1:$$

$$P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_k(t)\cdot[1-(\lambda+n\mu)\Delta t]+P_{k+1}(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_m(t+\Delta t)=P_{m-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_m(t)\cdot(1-n\mu\Delta t)+o(\Delta t)$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

- Soustavu rovnic upravíme opět pomocí stejného postupu:
  - Na pravé straně rovnice vynásobíme jedničkou pravděpodobnost se stejným indexem jako na levé straně.
  - Tuto pravděpodobnost převedeme na levou stranu rovnice.
  - Celou rovnici vydělíme výrazem Δt.
  - Vykonáme limitu pro $\Delta t \rightarrow 0$.

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)-P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)\cdot\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P_1(t+\Delta t)=P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)\Delta t+P_2(t)\cdot 2\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

pro $k=1,2,\ldots,n-1$:

$$P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_k(t)-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_n(t)-P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu)\Delta t+P_{n+1}(t)\cdot n\mu\Delta+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

pro $k=n+1,n+2,\ldots,m-1$:

$$P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_k(t)-P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot n\mu\Delta+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_m(t+\Delta t)=P_{m-1}(t)\cdot\lambda\Delta t+P_m(t)-P_m(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-P_0(t)\cdot\lambda\Delta t+P_1(t)\cdot\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P_1(t+\Delta t)-P_1(t)=P_0(t)\cdot\lambda\Delta t-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)\Delta t+P_2(t)\cdot 2\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k=1,2,\ldots,n-1:$$

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_n(t+\Delta t)-P_n(t)=P_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t-P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu)\Delta t+P_{n+1}(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$\text{pro } k=n+1,n+2,\ldots,m-1:$$

$$P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=P_{k-1}(t)\cdot\lambda\Delta t-P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu)\Delta t+P_{k+1}(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

$$\vdots$$

$$P_m(t+\Delta t)-P_m(t)=P_{m-1}(t)\cdot\lambda\Delta t-P_m(t)\cdot n\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-P_0(t)\cdot\lambda+P_1(t)\cdot\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=P_0(t)\cdot\lambda-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)+P_2(t)\cdot 2\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

pro $k=1,2,\ldots,n-1:$

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{k-1}(t)\cdot\lambda-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=P_{n-1}(t)\cdot\lambda-P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu)+P_{n+1}(t)\cdot n\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

pro $k=n+1,n+2,\ldots,m-1:$

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{k-1}(t)\cdot\lambda-P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu)+P_{k+1}(t)\cdot n\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P_m(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{m-1}(t)\cdot\lambda-P_m(t)\cdot n\mu+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-P_0(t)\cdot\lambda+P_1(t)\cdot\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=P_0(t)\cdot\lambda-P_1(t)\cdot(\lambda+\mu)+P_2(t)\cdot 2\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

pro $k=1,2,\ldots,n-1:$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{k-1}(t)\cdot\lambda-P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu)+P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=P_{n-1}(t)\cdot\lambda-P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu)+P_{n+1}(t)\cdot n\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

pro $k=n+1,n+2,\ldots,m-1:$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_{k-1}(t)\cdot\lambda-P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu)+P_{k+1}(t)\cdot n\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_m(t+\Delta t)-P_m(t)}{\Delta t}=P_{m-1}(t)\cdot\lambda-P_m(t)\cdot n\mu+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$P_0'(t) = -P_0(t)\cdot\lambda + P_1(t)\cdot\mu$$

$$P_1'(t) = P_0(t)\cdot\lambda - P_1(t)\cdot(\lambda+\mu) + P_2(t)\cdot 2\mu$$

$$\vdots$$

pro $k = 1,2,\ldots,n-1:$

$$P_k'(t) = P_{k-1}(t)\cdot\lambda - P_k(t)\cdot(\lambda+k\mu) + P_{k+1}(t)\cdot(k+1)\mu$$

$$\vdots$$

$$P_n'(t) = P_{n-1}(t)\cdot\lambda - P_n(t)\cdot(\lambda+n\mu) + P_{n+1}(t)\cdot n\mu$$

$$\vdots$$

pro $k = n+1, n+2,\ldots,m-1:$

$$P_k'(t) = P_{k-1}(t)\cdot\lambda - P_k(t)\cdot(\lambda+n\mu) + P_{k+1}(t)\cdot n\mu$$

$$\vdots$$

$$P_m'(t) = P_{m-1}(t)\cdot\lambda - P_m(t)\cdot n\mu$$

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(t) = 1$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

- Získanou soustavu diferenciálních rovnic (dynamický popis SHO) opět převedeme na soustavu lineárních rovnic (statický popis SHO).

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$0=-\lambda P_0+\mu P_1$$
$$0=\lambda P_0-(\lambda+\mu)P_1+2\mu P_2$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k=1,2,\dots,n-1:$$
$$0=\lambda P_{k-1}-(\lambda+k\mu)P_k+(k+1)\mu P_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$0=\lambda P_{n-1}-(\lambda+n\mu)P_n+n\mu P_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k=n+1,n+2\dots,m-1:$$
$$0=\lambda P_{k-1}-(\lambda+n\mu)P_k+n\mu P_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$0=\lambda P_{m-1}-n\mu P_m$$

$$\sum_{k=0}^{m}P_k=1$$

$$0=-(\lambda P_0-\mu P_1)$$
$$0=(\lambda P_0-\mu P_1)-(\lambda P_1-2\mu P_2)$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k=1,2,\dots,n-1:$$
$$0=(\lambda P_{k-1}-k\mu P_k)-[\lambda P_k-(k+1)\mu P_{k+1}]$$
$$\vdots$$
$$0=(\lambda P_{n-1}-n\mu P_n)-(\lambda P_n-n\mu P_{n+1})$$
$$\vdots$$
$$\text{pro } k=n+1,n+2,\dots,m-1:$$
$$0=(\lambda P_{k-1}-n\mu P_k)-(\lambda P_k-n\mu P_{k+1})$$
$$\vdots$$
$$0=(\lambda P_{m-1}-n\mu P_m)$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

Substituce: $z_k = \lambda P_{k-1} - k\mu P_k$ pro $k = 1,2,\ldots,n$

$z_k = \lambda P_{k-1} - n\mu P_k$ pro $k = n, n+1,\ldots,m$

$$
\begin{aligned}
&0 = -\left(\lambda P_0 - \mu P_1\right)\\
&0 = \left(\lambda P_0 - \mu P_1\right) - \left(\lambda P_1 - 2\mu P_2\right)\\
&\vdots\\
&\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1:\\
&0 = \left(\lambda P_{k-1} - k\mu P_k\right) - \left[\lambda P_k - (k+1)\mu P_{k+1}\right]\\
&\vdots\\
&0 = \left(\lambda P_{n-1} - n\mu P_n\right) - \left(\lambda P_n - n\mu P_{n+1}\right)\\
&\vdots\\
&\text{pro } k = n+1, n+2,\ldots,m-1:\\
&0 = \left(\lambda P_{k-1} - n\mu P_k\right) - \left(\lambda P_k - n\mu P_{k+1}\right)\\
&\vdots\\
&0 = \left(\lambda P_{m-1} - n\mu P_m\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&0 = -z_1\\
&0 = z_1 - z_2\\
&\vdots\\
&\text{pro } k = 1,2,\ldots,n-1:\\
&0 = z_k - z_{k+1}\\
&\vdots\\
&0 = z_n - z_{n+1}\\
&\vdots\\
&\text{pro } k = n+1, n+2,\ldots,m-1:\\
&0 = z_k - z_{k+1}\\
&\vdots\\
&0 = z_m
\end{aligned}
$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$0 = -z_1$$
$$0 = z_1 - z_2$$
$$\vdots$$
pro $k = 1,2,\ldots,n-1$:
$$0 = z_k - z_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$0 = z_n - z_{n+1}$$
$$\vdots$$
pro $k = n+1, n+2,\ldots,m-1$:
$$0 = z_k - z_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$0 = z_m$$

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_k = \ldots = z_n = \ldots = z_k = \ldots = z_m = 0$$

Tedy platí, že $0 = \lambda P_{k-1} - k\mu P_k$ pro $k = 1,2,\ldots,n$

a $0 = \lambda P_{k-1} - n\mu P_k$ pro $k = n, n+1,\ldots,m$.

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = 1,2,\ldots,n$$

$$P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = n, n+1,\ldots,m$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$P_1 = \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$\vdots$$

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \text{ pro } k = 1,2,\ldots,n$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

$$P_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} P_n = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 = \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+1} P_0$$

$$P_{n+2} = \frac{\lambda}{n\mu} P_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 = \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^2 \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 = \frac{1}{n^2 \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n+2} P_0$$

$$\vdots$$

$$P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} = \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n} P_n = \rho^{k-n} P_n \text{ pro } k = n, n+1, \ldots, m$$

$$P_k = \rho^{k-n} P_n = \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 = \frac{1}{n^{k-n} \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k P_0 \text{ pro } k = n, n+1, \ldots, m$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

Pravděpodobnost P_0 opět stanovíme z normativní podmínky pravděpodobnosti.

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_k + \ldots + P_n + P_{n+1} + \ldots + P_m = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k + \sum_{k=n+1}^{m} P_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{n^{k-n} \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 = 1$$

$$P_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + P_0 \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho}} \text{ pro } \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (m-n)} \text{ pro } \rho = 1$$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = \sum_{k=n+1}^{m} \rho^{k-n} =$$

$$= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{m-n} = \rho \cdot \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1$$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = \sum_{k=n+1}^{m} \rho^{k-n} =$$

$$= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{m-n} = \rho \cdot (m-n) =$$

$$= (m-n) \text{ pro } \rho = 1$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

- Pravděpodobnost odmítnutí zákazníka P_{ODM}:
  - Přicházející zákazník bude odmítnut, najde-li v okamžiku svého příchodu *m* zákazníků v systému (tedy jsou obsazena všechna místa v obsluze i ve frontě). Můžeme tedy psát:

$$P_{ODM} = P_m = \frac{1}{n^{m-n} \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m P_0.$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

- Střední počet zákazníků v obsluze *ES* stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou S je počet zákazníků v obsluze. Tedy platí:

$$ES = \sum_{s=0}^{n} sP_s = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + n\sum_{k=n}^{m} P_k = \sum_{k=0}^{n-1} s \cdot \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0^{\;*} + n\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} P_n^{\;**} =$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(P_0 + P_2 + \ldots + P_{n-2} + P_{n-1} + P_n + P_{n+1} + P_{m-1}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(1 - P_m\right).$$

Analytické řešení M/M/*n*/∞ SHO

$$*\sum_{k=0}^{n-1} k\cdot\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k} P_0=\frac{\lambda}{\mu}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} P_0=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left(P_0+P_1+\ldots+P_{n-2}\right).$$

$$**n\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} P_n=nP_n+n\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} P_n=n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} P_0+n\cdot\frac{\lambda}{n\mu}\cdot\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n-1} P_n=$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} P_0+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n-1} P_n=$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}\cdot P_{n-1}+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left[\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{0} P_n+\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{1} P_n+\ldots+\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m-n-1} P_n\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}\cdot P_{n-1}+\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left(P_n+P_{n+1}+\ldots+P_{m-1}\right)=\frac{\lambda}{\mu}\cdot\left(P_{n-1}+P_n+P_{n+1}+\ldots+P_{m-1}\right).$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

- Střední počet zákazníků ve frontě *EL* opět stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou L je počet zákazníků ve frontě. Můžeme tedy psát:

$$EL = \sum_{l=0}^{m-n} l P_l = 0 \cdot \sum_{k=0}^{n} P_k + \sum_{l=1}^{m-n} l P_{n+l} \,.$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

- Střední počet zákazníků v systému *EK* je roven součtu středního počtu požadavků v obsluze a středního počtu požadavků ve frontě. Můžeme tedy psát:

$$EK = ES + EL = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left(1 - P_m\right) + \sum_{l=1}^{m-n} l P_{n+l} .$$

Analytické řešení M/M/*n*/*m* SHO

- Využití obslužných linek (systému) κ stanovíme na základě následující úvahy. Systém průměrně obsluhuje *ES* zákazníků a je schopen obsluhovat *n* zákazníků, tedy platí:

$$\kappa = \frac{ES}{n} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_m)}{n} = \rho \cdot (1 - P_m).$$