Testování statistických hypotéz

Testování normality

- **Př. 1:** Při simulaci provozu na křižovatce byla získána data o mezerách mezi přijíždějícími vozidly v [s]. Otestujte na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ pomocí χ^2 testu dobré shody, zda získaná data pocházejí z normálního rozdělení. Data jsou uložena v souboru Mezery.xls.

Testování normality

- Abychom byli schopni specifikovat nulovou a alternativní hypotézu, je nejdříve třeba odhadnout na základě výběru neznámé parametry normálního rozdělení μ a σ^2. Odhad provedeme např. pomocí metody maximální věrohodnosti. Odvodili jsme si, že:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \,,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 .$$

Testování normality

Odhad parametrů rozdělení	
μ	4,61985
σ^2	10,85075
σ	3,29405

např. funkce PRŮMĚR

např. funkce DEVSQ / POČET

např. funkce ODMOCNINA

Testování normality

- Máme proveden odhad parametrů rozdělení, můžeme tedy specifikovat obě hypotézy:
  - H_0 – Náhodný výběr pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou $\mu = 4{,}61985$ a rozptylem $\sigma^2 = 10{,}85075$.
  - H_1 – Náhodný výběr nepochází z normálního rozdělení se střední hodnotou $\mu = 4{,}61985$ a rozptylem $\sigma^2 = 10{,}85075$.

Testování normality

- Víme, že pro testovou statistiku platí:

$$G = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - n \cdot \pi_{0,i}\right)^2}{n \cdot \pi_{0,i}} \rightarrow \chi^2_{k-h-1}.$$

- Abychom mohli stanovit x_{obs}, musíme získaný datový soubor rozdělit do tříd. Doporučuje se volit konstantní šířku třídy (vyjma tříd krajních), počet tříd se doporučuje volit v rozmezí 5 – 15.

Testování normality

- Pro odhad počtu tříd *k* se nejčastěji používá Sturgesovo pravidlo:

  $k \approx 1 + 3{,}3 \cdot \log n,$

  kde *n* je rozsah souboru (zjistíme např. pomocí funkce POČET). V našem případě *n* = 131, dostáváme tedy:

  $k \approx 1 + 3{,}3 \cdot \log 131 \doteq 8.$

Testování normality

- Nyní je třeba zvolit vhodnou šířku třídy *š*, kterou můžeme stanovit podle vztahu:

$$\check{s} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

kde x_{max} je maximální hodnota ve výběru (zjistíme např. pomocí funkce MAX) a x_{min} je minimální hodnota ve výběru (zjistíme např. pomocí funkce MIN). V našem případě:

$$\check{s} = \frac{24{,}9 - 0{,}80}{8} \doteq 3.$$

Testování normality

- Nyní vhodně zvolíme hranice jednotlivých tříd a pozorované četnosti v jednotlivých třídách zjistíme pomocí funkce ČETNOSTI.

Hranice tříd	Četnosti
1 $(-\infty;1\rangle$	3
4 $(1;4\rangle$	63
7 $(4;7\rangle$	45
10 $(7;10\rangle$	12
13 $(10;13\rangle$	6
16 $(13;16\rangle$	1
19 $(16;19\rangle$	0
$(19;\infty)$	1

Testování normality

Třída	Hranice třídy	Horní hranice h_i	Pozorovaná četnost n_i	Hodnota distribuční funkce $F(h_i)$	Teoretická relativní četnost $\pi_{0,i}$	Teoretická četnost $n \cdot \pi_{0,i}$
1	(-∞;1>	1	3	0,13590	0,13590	17,80351
2	(1;4>	4	63	0,42537	0,28947	37,92009
3	(4;7>	7	45	0,76503	0,33965	44,49473
4	(7;10>	10	12	0,94880	0,18377	24,07402
5	(10;13>	13	6	0,99452	0,04572	5,98989
6	(13;16>	16	1	0,99972	0,00520	0,68169
7	(16;19>	19	0	0,99999	0,00027	0,03525
8	(19;∞)	∞	1	1,00000	0,00001	0,00083
∑			131		1,00000	131

Hodnoty distribuční funkce pro jednotlivé horní meze tříd h_i stanovíme pomocí funkce NORMDIST, kde za parametry střední hodnota a směrodatná odchylka dosadíme bodové odhady.

Testování normality

- Z tabulky vidíme, že pro třídy 6, 7 a 8 není splněna podmínka, že všechny teoretické četnosti musí být větší než 5, sloučíme tedy tyto třídy s třídou 5.

Třída	Hranice třídy	Horní hranice	Pozorovaná četnost n_i	Teoretická četnost $n \cdot \pi_{0,i}$	$\frac{(n_i - n \cdot \pi_{0,i})^2}{n \cdot \pi_{0,i}}$
1	(-∞;1>	1	3	17,80351	12,30903
2	(1;4>	4	63	37,92009	16,58757
3	(4;7>	7	45	44,49473	0,00574
4	(7;10>	10	12	24,07402	6,05557
5	(10;∞)	∞	8	6,70765	0,24899
∑			131	131	**35,20690**

χ_{obs}

Testování normality

- Nyní je třeba stanovit kritickou hodnotu testu. Jelikož hladina významnosti α = 0,05, po sloučení máme 5 tříd (*k*) a odhadovali jsme dva parametry rozdělení (*h*), dostáváme:

$$x_{krit} = \chi^2_{(1-\alpha);k-h-1} = \chi^2_{0,95;2} = CHIINV(0,05;2) \doteq 5,99.$$

- Vidíme, že pozorovaná hodnota testové statistiky je vyšší než kritická hodnota testu, leží tedy v kritickém oboru, proto na hladině významnosti 0,05 zamítáme nulovou hypotézu ve prospěch alternativní. Normalita dat tedy nebyla potvrzena.

Test hypotézy o střední hodnotě

- **Př. 2:** Při simulaci systému hromadné obsluhy byly sledovány doby obsluhy požadavků v [min]. Získaná data jsou uložena v souboru Obsluha1.xls. Na hladině významnosti 0,05 otestujte hypotézu, že střední hodnota doby obsluhy je rovna 20 min. Předpokládejte, že normalita dat je splněna, směrodatnou odchylku základního souboru neznáme.

Test hypotézy o střední hodnotě

- Než přistoupíme k formulaci hypotéz, spočítejme si některé číselné charakteristiky náhodného výběru, které budeme dále potřebovat.

Rozsah souboru *n*	100
Výběrový průměr $\bar{x}$	20,52
Výběrová směrodatná odchylka *s*	7,76
Střední hodnota populace μ_0	20,00

např. funkce SMODCH.VÝBĚR

Test hypotézy o střední hodnotě

- Nyní formulujme obě hypotézy:
  - H_0 – Střední doba obsluhy v systému hromadné obsluhy je rovna 20 min.
  - H_1 – Střední doba obsluhy v systému hromadné obsluhy se nerovná 20 min (vidíme, že vypočítaný výběrový průměr se blíží této hodnotě, proto volíme oboustrannou hypotézu, v úvahu dále přichází i pravostranná alternativa).

Test hypotézy o střední hodnotě

- Sice neznáme směrodatnou odchylku, ale máme výběr velkého rozsahu, mohli bychom tedy Studentovo rozdělení aproximovat normovaným. V tomto případě ale použijeme Studentovo rozdělení.
- Pozorovaná hodnota testové statistiky je rovna:

$$x_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{20{,}52 - 20}{7{,}76} \cdot \sqrt{100} \doteq 0{,}67 .$$

Test hypotézy o střední hodnotě

- Nyní přistoupíme ke stanovení kritických hodnot testu. Víme, že testová statistika se řídí Studentovým rozdělením s 99 stupni volnosti, hladina významnosti je 0,05. Můžeme tedy psát:

$$x_{krit,L} = -t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = -t_{0,975;99} = -TINV(0,05;99) \doteq -1,98,$$

$$x_{krit,P} = t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{0,975;99} = TINV(0,05;99) \doteq 1,98.$$

- Kritický obor je tedy $(-\infty;-1,98\rangle \cup \langle 1,98;\infty)$.

Test hypotézy o střední hodnotě

- Vidíme tedy, že pozorovaná hodnota testové statistiky neleží v kritickém oboru, tudíž na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o tom, že střední doba obsluhy v simulovaném systému hromadné obsluhy je rovna 20 min.

Test hypotézy o rovnosti dvou středních hodnot

- **Př. 3:** Při dvou nezávislých simulačních experimentech byla simulována obsluha v systému hromadné obsluhy. Byly získány dva náhodné výběry a to doby obsluhy v [min], data jsou uložena v souboru Obsluha2.xls. Na hladině významnosti 0,05 otestujte hypotézu, že střední hodnoty obou souborů jsou shodné. Předpokládejte, že normalita dat je splněna, směrodatné odchylky rozdělení nejsou známy.

Test hypotézy o rovnosti dvou středních hodnot

- Určeme si nejdříve pro oba datové soubory potřebné číselné charakteristiky.

První výběr	
Rozsah souboru *n*	100
Výběrový průměr $\overline{x}$	20,52
Výběrová směrodatná odchylka *s*	7,76

Druhý výběr	
Rozsah souboru *n*	100
Výběrový průměr $\overline{x}$	23,75
Výběrová směrodatná odchylka *s*	11,13

Test hypotézy o shodě dvou středních hodnot

- V tomto případě je zřejmé, že neznáme směrodatné odchylky populací (máme pouze jejich odhady). Proto musíme nejdříve přistoupit k otestování, zda lze očekávat shodné rozptyly obou populací či nikoliv. K tomu použijeme F-test, budeme uvažovat hladinu významnosti rovnu 0,05.

Test hypotézy o shodě dvou středních hodnot

- Stanovme si obě hypotézy k F-testu:
  - H_0 – Rozptyl populace 1 je roven rozptylu populace 2, tedy $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
  - H_1 – Rozptyl populace 1 je menší než rozptyl populace 2 (vypovídají o tom oba náhodné výběry), tedy $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.
- Dosazením do vztahu pro testovou statistiku dostaneme:

$$F_2 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{7{,}76^2}{11{,}13^2} \doteq 0{,}49.$$

Test hypotézy o shodě dvou středních hodnot

- Nyní musíme stanovit kritickou hodnotu testu, pro kterou v případě zvolené levostranné alternativy platí:

$$x_{krit} = F_{\alpha;n_1-1;n_2-1} = FINV(1-\alpha;n_1-1;n_2-1) =$$
$$= FINV(0{,}95;99;99) \doteq 0{,}72.$$

- Jelikož z výsledků testu vidíme, že pozorovaná hodnota testové statistiky leží v kritickém oboru, zamítáme nulovou hypotézu o rovnosti rozptylů obou populací. Musíme tedy použít 3. variantu.

Test hypotézy o rovnosti dvou středních hodnot

- Formulujme nyní obě hypotézy:
  - H_0 – Střední hodnoty obou souborů jsou si rovny, tedy $\mu_1 = \mu_2$.
  - H_1 – Střední hodnota prvního souboru je nižší než střední hodnota druhého souboru, tedy $\mu_1 < \mu_2$ (výběrové průměry ukazují na tuto nerovnost, v úvahu připadá i oboustranná alternativa).

Test hypotézy o rovnosti dvou středních hodnot

- Dosazením do známého vztahu stanovíme pozorovanou hodnotu testové statistiky:

$$T_2 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(20{,}52 - 23{,}75) - 0}{\sqrt{\frac{7{,}76^2}{100} + \frac{11{,}13^2}{100}}} \doteq -2{,}39.$$

- Počet stupňů volnosti testového rozdělení získáme rovněž dosazením do známého vzorce, výsledek musíme zaokrouhlit na celé číslo.

Test hypotézy o rovnosti dvou středních hodnot

$$v \cong \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \cdot \left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \cdot \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{7{,}76^2}{100} + \frac{11{,}13^2}{100}\right)^2}{\frac{1}{100 - 1} \cdot \left(\frac{7{,}76^2}{100}\right)^2 + \frac{1}{100 - 1} \cdot \left(\frac{11{,}13^2}{100}\right)^2} \cong 177.$$

Test hypotézy o rovnosti dvou středních hodnot

- Pro kritickou hodnotu testu platí:

$$x_{krit} = -t_{1-\alpha;v} = -t_{0,95;177} = -TINV(0,1;177) = -1,65,$$

kritický obor je tedy tvořen intervalem $(-\infty;-1,65\rangle$, vypočítaná hodnota testové statistiky leží v kritickém oboru, proto na hladině významnosti α = 0,05 zamítáme nulovou hypotézu o rovnosti středních hodnot.