Úvod do metody Monte Carlo

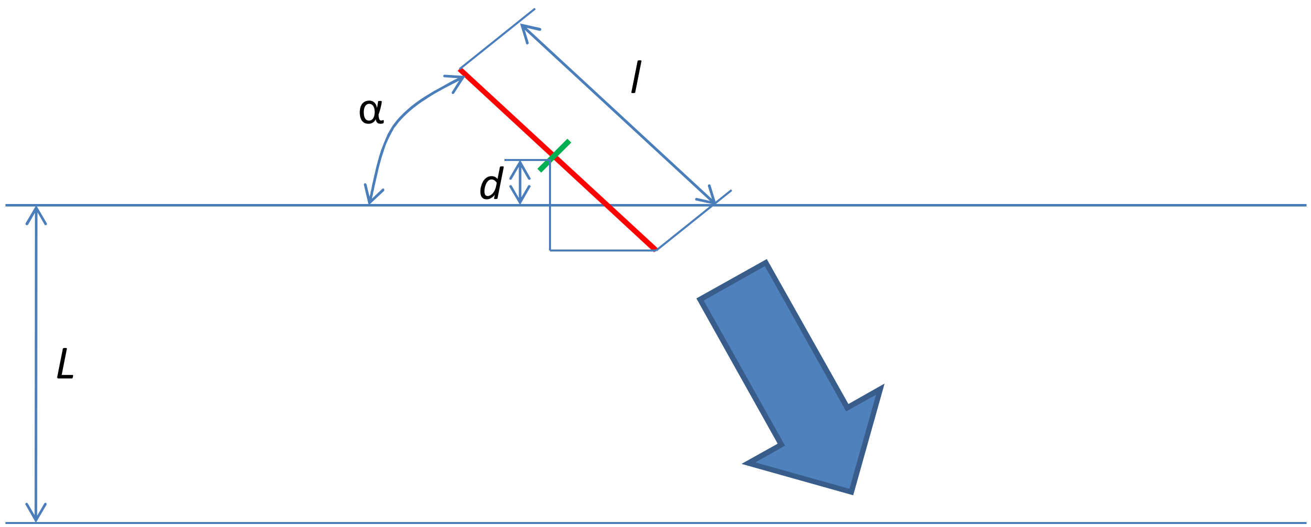
Metoda Monte Carlo

- Historicky prvním příkladem použití principu metody Monte Carlo je tzv. Buffonova úloha, jež je úlohou vztahující se ke geometrické pravděpodobnosti: V rovině jsou narýsovány rovnoběžky, jejichž vzájemná vzdálenost je rovna L. Zajímá nás pravděpodobnost, že náhodně vržená jehla o délce $l < L$ protne některou přímku.

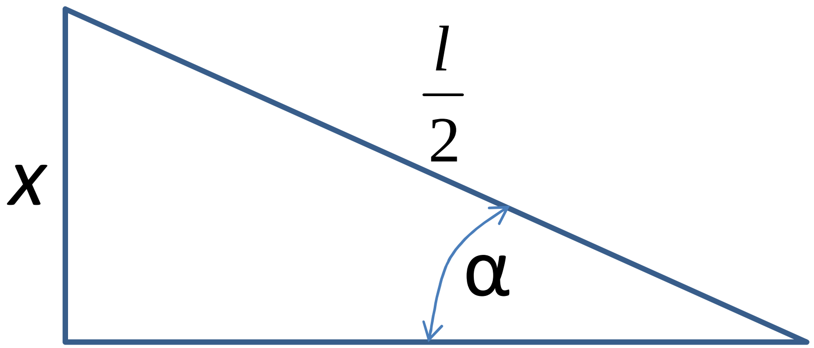
Metoda Monte Carlo

- Uvažujme, že rovnoběžky jsou rovnoběžné s osou x. Označme *d* vzdálenost středu jehly od nejbližší rovnoběžky a α úhel, který svírá jehla s danou rovnoběžkou (viz obrázek). Poloha jehly je tedy určena bodem o souřadnicích [*d*; α], kde $0 \le d \le \frac{L}{2}$ a $0 \le \alpha \le \pi$.

Metoda Monte Carlo



$$\sin\alpha = \frac{x}{\frac{l}{2}} \Rightarrow x = \frac{l}{2}\cdot\sin\alpha$$



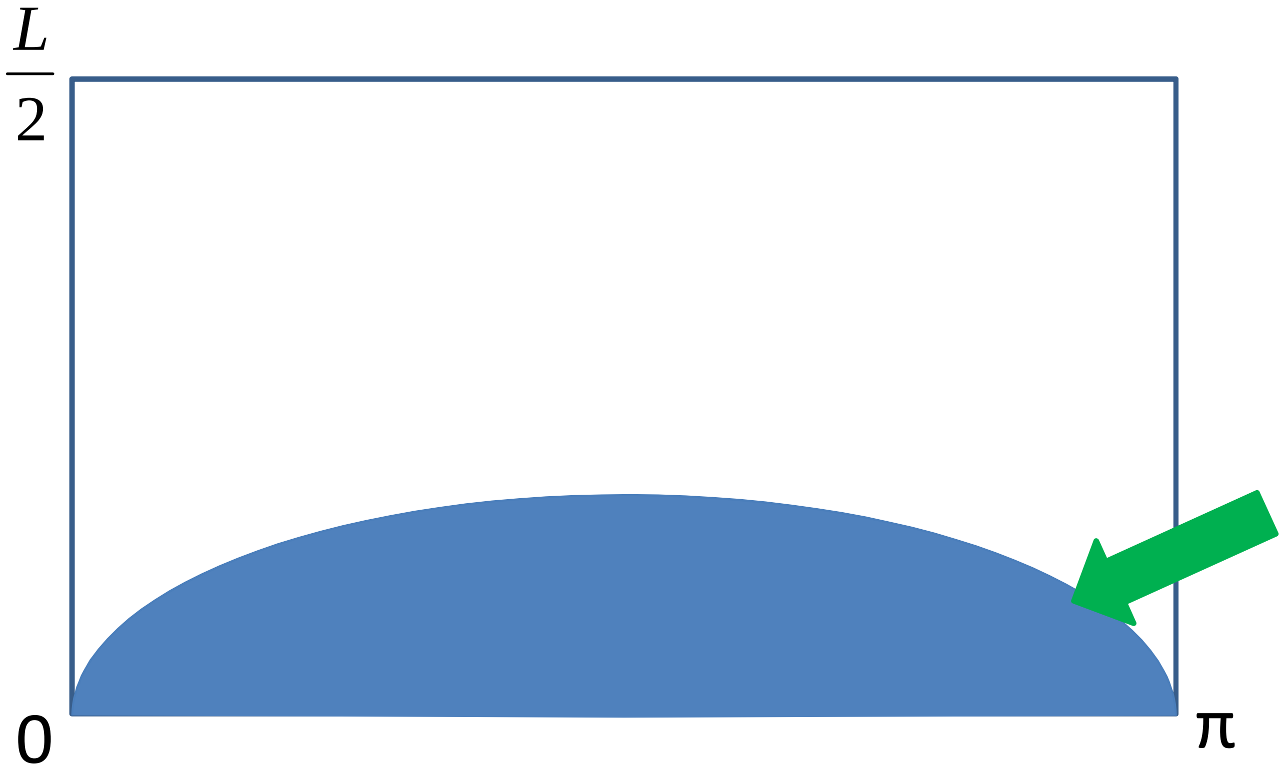
Metoda Monte Carlo

- Z obrázku je zřejmé, že jehla protne příslušnou rovnoběžku, pokud bude platit:

$$d \leq \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha .$$

- Hozením jehly mohou nastat dva případy:
  - Jehla protne příslušnou rovnoběžku – úspěch.
  - Jehla neprotne příslušnou rovnoběžku – neúspěch.

Metoda Monte Carlo



Oblast příznivých výsledků vymezená nerovností

$$d \leq \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha .$$

Metoda Monte Carlo

- Pravděpodobnost toho, že jehla protne rovnoběžku, stanovíme podle geometrické definice pravděpodobnosti:

$$P = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha \, d\alpha}{\frac{L}{2} \cdot \pi} = \frac{\frac{l}{2} \cdot [-\cos\alpha]_0^{\pi}}{\frac{L}{2} \cdot \pi} = \frac{\frac{l}{2} \cdot (1+1)}{\frac{L}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{L \cdot \pi}.$$

Metoda Monte Carlo

- Tuto pravděpodobnost můžeme odhadnout na základě znalosti Bernoulliho věty, která nám říká, že relativní četnost nějakého jevu stochasticky konverguje k jeho pravděpodobnosti, můžeme tedy pro odhad pravděpodobnosti psát:

  $$\hat{P} = \frac{m}{n},$$

  kde *m* značí počet úspěšných pokusů (jehla protnula rovnoběžku) a *n* značí počet všech realizovaných pokusů.

Metoda Monte Carlo

- Můžeme tedy psát:

$$\frac{2l}{L \cdot \pi} \approx \frac{m}{n},$$

z čehož úpravami získáme:

$$\pi \approx \frac{2l \cdot n}{L \cdot m}.$$

- Realizujeme-li dostatečný počet pokusů, lze výše uvedený vztah využít k experimentálnímu stanovení hodnoty Ludolfova čísla π.

Metoda Monte Carlo

Experimentátor	Rok	Počet realizovaných pokusů	Stanovený odhad hodnoty π
Volf	1850	5000	3,1596
Smith	1855	3204	3,1553
Fox	1894	1120	3,1419
Laccarini	1901	3408	3,1415929

$$\pi \doteq 3{,}1415926539$$

Metoda Monte Carlo

- Samotná metoda Monte Carlo byla formulována a prakticky použita J. von Neumannem a S. Ulamem při vývoji atomové bomby během 2. světové války.
- Při výzkumu chování neutronů bylo třeba vyřešit problém, jaké procento neutronů v určité spršce pronikne nějakou překážkou, např. nádrží vody určitých rozměrů.

Metoda Monte Carlo

- Při řešení tohoto problému předpovědi života neutronu byla použita technika kola rulety, odtud plyne i název metody.
- Např. je známo, že při srážce neutronu a atomu vodíku je neutron pohlcen průměrně v jednom ze sta případů. Při stanovení toho, zda bude neutron pohlcen či nikoliv, je možno použít kolo rulety rozdělené na 100 dílků, přičemž 1 označený dílek bude znamenat pohlcení neutronu.

Metoda Monte Carlo

- V případě, že nedojde k zániku neutronu, se pomocí dalšího kola rulety náhodně stanoví trajektorie neutronu do další srážky.
- Takto se postupuje do té doby, než dojde k zániku neutronu nebo k jeho průchodu překážkou.
- Je zřejmé, že realizovat tento experiment pomocí skutečných kol rulet by bylo prakticky nerealizovatelné.

Metoda Monte Carlo

- V té době byl však již k dispozici počítač, pomocí kterého bylo možno tento experiment realizovat.
- Metoda Monte Carlo je numerickou metodou založenou na vztahu mezi pravděpodobnostními charakteristikami různých náhodných procesů a veličinami, které jsou řešením studovaných úloh.

Metoda Monte Carlo

- Princip metody tedy spočívá v následujících bodech:
  1) Formulace nové úlohy mající náhodný charakter, jejíž řešení se shoduje s řešením původní úlohy.
  2) Řešení nové úlohy pomocí statistických experimentů.
- Metodu Monte Carlo lze použít např. při řešení určitých integrálů (zejména vícerozměrných) nebo při řešení soustav rovnic.

Metoda Monte Carlo

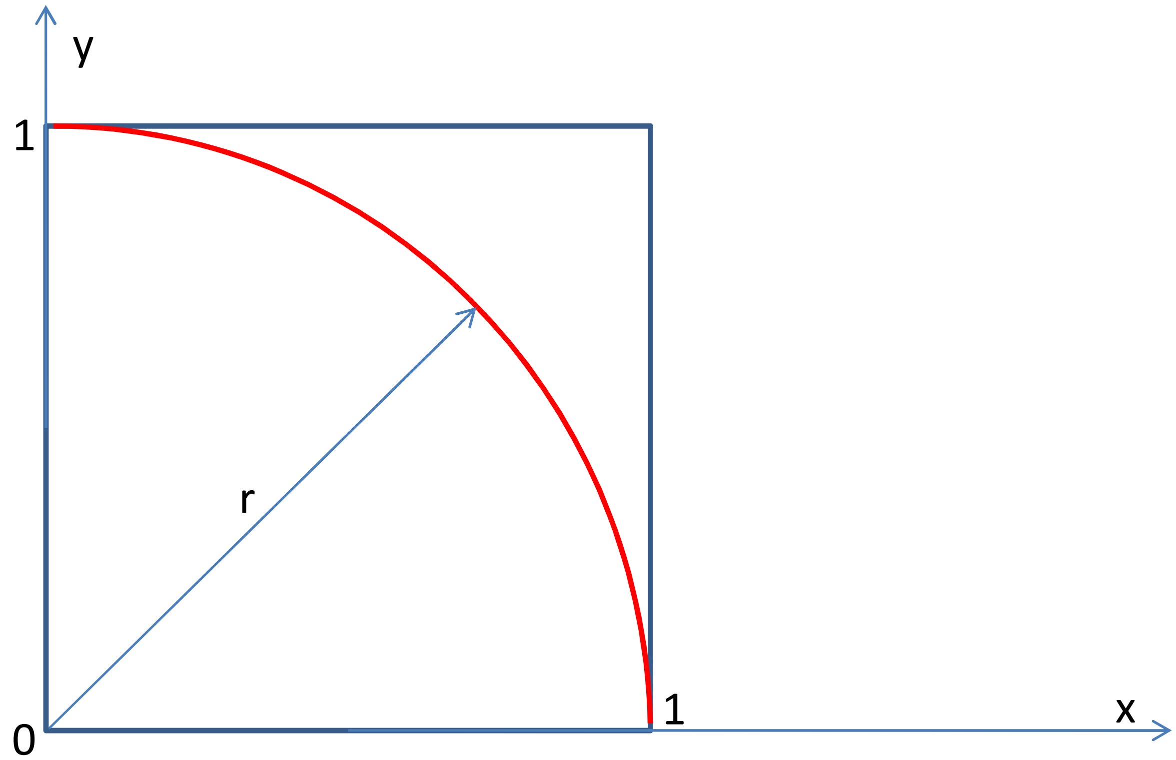
- Existují dva možné přístupy při řešení úloh metodou Monte Carlo:
  1) Geometrická metoda založená na geometrické pravděpodobnosti.
  2) Výpočet založený na odhadu střední hodnoty náhodné proměnné.

Metoda Monte Carlo

- ad 1) S geometrický přístupem jsme se již setkali v rámci Buffonovy úlohy. Nyní si na dvou jednoduchých příkladech ukážeme, jakým jiným způsobem lze experimentálně stanovit hodnotu π a jak lze řešit jednoduchý určitý integrál. Při řešení využijeme generátor pseudonáhodných čísel software Microsoft Excel (funkce NÁHČÍSLO).

Metoda Monte Carlo

- **Př. 1:** Je dán jednotkový čtverec, ve kterém je vepsána kruhová výseč (viz obrázek). Geometrickým přístupem experimentálně stanovte hodnotu Ludolfova čísla π.



Metoda Monte Carlo

- Definujme jev A – náhodně vybraný bod jednotkového čtverce leží v kruhové výseči.
- Je zřejmé, že na základě geometrické pravděpodobnosti můžeme pro pravděpodobnost jevu A psát:

$$P(A) = \frac{\frac{\pi \cdot r^2}{4}}{r^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Metoda Monte Carlo

- Nyní je třeba provést sérii náhodných pokusů – výběr náhodného bodu X z jednotkového čtverce. Bod X je určen dvěma nezávislými rovnoměrně rozdělenými souřadnicemi x a y, kde $0 \leq x \leq 1$ a $0 \leq y \leq 1$. Konkrétní realizace souřadnic x a y lze získat v Excelu pomocí funkce NÁHČÍSLO, jež generuje rovnoměrně rozdělená náhodná čísla z intervalu ‹0; 1).

Metoda Monte Carlo

- Máme-li vygenerovány dvojice souřadnic x a y, můžeme přistoupit k rozhodnutí, zda nastal úspěch (bod leží v kruhové výseči) či neúspěch. Je zřejmé, že pro vzdálenost *d* bodu X [x; y] od počátku souřadnicového systému platí:

  $$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Úspěch tedy nastane tehdy, bude-li pro *i*-tý bod platit:

  $$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \le 1,$$

  neboť poloměr výseče je roven 1.

Metoda Monte Carlo

- Nastane-li v *n* pokusech *m* úspěchů, kde $m \leq n$, můžeme pro pravděpodobnost jevu A psát:

$$P(A) \approx \frac{m}{n}.$$

- Dostáváme tedy:

$$\frac{m}{n} \approx \frac{\pi}{4} \Rightarrow \pi \approx 4 \cdot \frac{m}{n}.$$

Metoda Monte Carlo

Počet realizovaných pokusů	Počet úspěšných pokusů	Stanovený odhad hodnoty π
100	74	2,96000
1000	782	3,12800
65532	51503	3,14369

$$\pi \doteq 3{,}1415926539$$

- Je třeba ovšem pamatovat na to, že ve všech případech se jedná o bodový odhad hodnoty π.

Metoda Monte Carlo

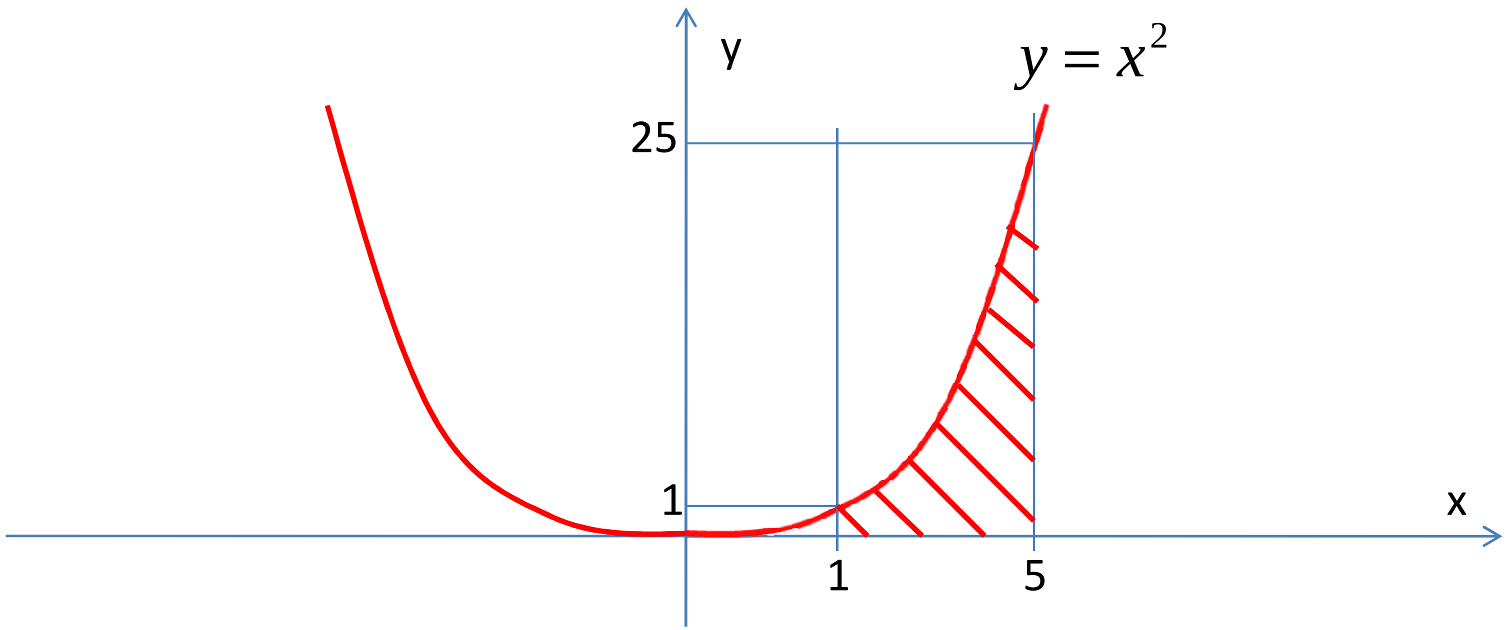
- **Př. 2:** Geometrickou metodou vyřešte určitý inegrál $\int_1^5 x^2\,dx$.

- Integrál nejdříve spočítáme analyticky:

$$\int_1^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5 = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3} \doteq 41{,}33.$$

Metoda Monte Carlo

- Víme, že integrál funkce $f(x)$ je roven ploše, která je vymezena průběhem funkce $f(x)$ a osou x. Zakresleme si náš případ.



Metoda Monte Carlo

- Definujme si opět jev A – náhodně vybraný bod X [x; y] padne do vyšrafované oblasti, kde 1 ≤ x ≤ 5 a 0 ≤ y ≤ 25. Na základě definice geometrické pravděpodobnosti můžeme pro pravděpodobnost jevu A psát:

$$P(A)=\frac{\int_1^5 x^2\,dx}{(5-1)\cdot(25-0)}=\frac{I}{100}.$$

Metoda Monte Carlo

- Nyní musíme generovat rovnoměrně rozdělené souřadnice bodů ležících v intervalech ‹1; 5› a ‹0; 25›. Je zřejmé, že při generování musíme užít některou z metod transformace, použijeme metodu inverzní transformace:

  $x_i = 1 + (5 - 1) \cdot \text{NÁHČÍSLO}()$,

  $y = 0 + (25 - 0) \cdot \text{NÁHČÍSLO}()$.

Metoda Monte Carlo

- Máme-li vygenerovány souřadnice bodů, musíme rozhodnout o tom, zda nastal úspěch či neúspěch. Je zřejmé, že náhodně vybraný bod patří do vyšrafované oblasti, je-li pro *i*-tý bod splněna podmínka:

$$y_i \le x_i^2 .$$

Metoda Monte Carlo

- Nastane-li v *n* pokusech *m* úspěchů, kde $m \leq n$, můžeme pro pravděpodobnost jevu A psát:

$$P(A) \approx \frac{m}{n}.$$

- Dostáváme tedy:

$$\frac{m}{n} \approx \frac{I}{100} \Rightarrow I \approx 100 \cdot \frac{m}{n}.$$

Metoda Monte Carlo

Počet realizovaných pokusů	Počet úspěšných pokusů	Stanovený odhad hodnoty π
100	52	52,00000
1000	375	37,50000
65533	27099	41,35169

$$I \doteq 41{,}33$$

- Je třeba ovšem pamatovat na to, že ve všech případech se jedná o bodový odhad hodnoty integrálu.

Metoda Monte Carlo

- ad 2) Tento přístup se dá využít např. při výpočtu integrálů. Nechť je ξ spojitá náhodná veličina definovaná na intervalu $(a; b)$ hustotou pravděpodobnosti $f(x)$. Vyšetřujme spojitou funkci $\eta = g(\xi)$. Nechť existuje konečná střední hodnota funkce $g(\xi)$ definovaná vztahem:

$$E[g(\xi)] = \int_a^b g(x) \cdot f(x) dx.$$

Metoda Monte Carlo

- Provedeme-li *n* realizací $x_1,\dots, x_n$, je možno hodnotu integrálu *I* brát jako aritmetický průměr hodnot $g(x_i)$:
  $$I \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} g(x_i).$$
- Úkolem je tedy vypočítat určitý integrál $I = \int_a^b g(x)dx$. Zvolme spojité rozdělení definované na intervalu $(a; b)$ popsané hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ tak, aby platilo:
  $$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Metoda Monte Carlo

- Upravme určovaný integrál do podoby:

$$I = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f(x) dx = \int_a^b g^*(x) \cdot f(x) dx.$$

- Tento integrál jsme již schopni stanovit. Postup je následující:
    1) Generujeme hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ z rozdělení definovaného hustotou $f(x)$.
    2) Spočítáme hodnoty $g^*(x_i)$, čímž dostáváme realizace náhodných proměnných se stejným rozdělením.

Metoda Monte Carlo

3) Při dostatečně velkém počtu pokusů n lze za odhad hodnoty integrálu považovat aritmetický průměr hodnot $g^*(x_i)$:

$$I \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} g^*(x_i).$$

---

pozn. Využíváme Zákon velkých čísel, který nám říká, že jsou-li X_1, X_2,…, X_n nezávislé náhodné proměnné se stejnými středními hodnotami $EX_1 = EX_2 = \ldots = X_n = \mu$, potom $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ stochasticky konverguje k μ.

Metoda Monte Carlo

- **Př. 3:** Odhadněte metodou Monte Carlo hodnotu nevlastního integrálu $I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

- Vypočítejme nejdříve integrál analyticky:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} [arctg\, x]_0^a =$$

$$= \lim_{a\to\infty} (arctg\, a - arctg\, 0) = \lim_{a\to\infty} arctg\, a - \lim_{a\to\infty} arctg\, 0 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}5707963268.$$

Metoda Monte Carlo

- Nyní musíme vybrat vhodné rozdělení pravděpodobnosti definované na intervalu (0; ∞). Na tomto intervalu je např. definováno exponenciální rozdělení s parametrem μ = 1, pro hustotu pravděpodobnosti tedy platí:

$$f(x) = e^{-x} \text{ pro } x > 0,$$

$$f(x) = 0 \text{ jinde}.$$

Metoda Monte Carlo

- Upravme integrál do tvaru:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} dx = \int_0^\infty \frac{1}{e^{-x} \cdot \left(1+x^2\right)} \cdot e^{-x} dx,$$

kde $g^*(x) = \dfrac{1}{e^{-x} \cdot \left(1+x^2\right)}$.

Metoda Monte Carlo

- Nyní postupujeme následujícím způsobem:
  1) Generujeme hodnoty x_i exponenciálního rozdělení s parametrem μ = 1. Můžeme např. použít vztah získaný metodou inverzní transformace:

     $$x_i = -\frac{\ln r_i}{\mu} = -\ln r_i \, ,$$

     kde r_i je náhodné číslo rovnoměrně rozdělené v intervalu (0; 1) (funkce NÁHČÍSLO).

Metoda Monte Carlo

2) Vypočítáme hodnoty $g^*(x_i)$.
3) Spočítáme aritmetický průměr hodnot $g^*(x_i)$, neboť platí:

$$I \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} g^*(x_i).$$

Počet realizovaných pokusů	Stanovený odhad hodnoty π
100	1,36607
1000	1,65984
65534	1,47983

$$I \doteq 1{,}5707963268$$

Metoda Monte Carlo

- Seznámili jsme se se základními principy metody Monte Carlo, nyní nás bude zajímat, jaká je přesnost odhadu metodou Monte Carlo.
- Uvažujme přístup založený na geometrické pravděpodobnosti. Při tomto přístupu realizujeme náhodný pokus, při kterém může nastat buď úspěch nebo neúspěch.

Metoda Monte Carlo

- Jedná se tedy o Bernoulliho pokusy (nezávislé pokusy mající pouze dva možné výsledky – úspěch a neúspěch, pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je konstantní), kdy neznáme pravděpodobnost úspěchu, ale chceme ji na základě experimentu stanovit.
- Zaveďme proměnnou δ_i, která v případě úspěchu nabude hodnoty 1 a v případě neúspěchu hodnoty 0.

Metoda Monte Carlo

- Definujme proměnnou M:

  $$M = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \,,$$

  kde *n* je počet realizovaných pokusů. Proměnná M se řídí binomickým rozdělením; pro pravděpodobnost, že v *n* pokusech nastane právě *m* úspěchů, platí:

  $$P(M = m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} \,,$$

  kde 0 < *p* < 1 je pravděpodobnost úspěchu.

Metoda Monte Carlo

- Pro střední hodnotu a rozptyl binomické náhodné proměnné platí:

$$EM = n \cdot p, DM = n \cdot p \cdot (1 - p).$$

- Uvažujme nyní proměnnou $\frac{M}{n}$. Z vlastností střední hodnoty a rozptylu plyne:

$$E\left(\frac{M}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot EM = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p,$$

$$D\left(\frac{M}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot DM = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p \cdot (1 - p) = \frac{p \cdot (1 - p)}{n}.$$

Metoda Monte Carlo

- Při dalším odvozování použijeme Čebyševovu nerovnost:

  Nechť X je náhodná proměnná s libovolným, obecně neznámým rozdělením, s konečnou střední hodnotou EX a rozptylem DX. Potom pro libovolně malé ε > 0 platí:

$$P\left(\left|X - EX\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Metoda Monte Carlo

- Položme $X = \frac{M}{n}$ a dosaďme do Čebyševovy nerovnosti odvozené vztahy pro $E\left(\frac{M}{n}\right)$ a $D\left(\frac{M}{n}\right)$:

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot \varepsilon^2},$$

tato nerovnost je nazývána Bernoulliho nerovnost.

Metoda Monte Carlo

- Bernoulliho nerovnost můžeme zjednodušit na základě skutečnosti, že:

  $$p \cdot (1 - p) \leq \frac{1}{4},$$

  potom dostaneme:

  $$P\left(\left|\frac{M}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot \varepsilon^2}.$$

- Z tohoto vztahu plyne, že pro *n* → ∞ se veličina $\frac{M}{n}$ (tedy relativní četnost úspěchu) blíží pravděpodobnosti úspěchu *p*.

Metoda Monte Carlo

- Označme nyní pravděpodobnost, že absolutní odchylka veličiny $\frac{M}{n}$ od pravděpodobnosti úspěchu *p* bude menší než předem stanovená maximálně přípustná chyba ε jako spolehlivost odhadu 1 – α, tedy:

$$P\left(\left|\frac{M}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1-\alpha .$$

Metoda Monte Carlo

- Potom můžeme psát:

  $$1-\alpha \geq 1-\frac{1}{4n\cdot\varepsilon^2},$$

  kde α je hladina významnosti. Tato nerovnost vyjadřuje vztah mezi počtem pokusů *n*, maximálně přípustnou chybou ε a spolehlivostí odhadu 1 – α. Ze vztahu plyne, že chceme-li docílit při odhadu pravděpodobnosti p pomocí relativní četnosti $\frac{M}{n}$ co nejmenší chyby a co největší spolehlivosti odhadu, musíme počet pokusů zvyšovat.

Metoda Monte Carlo

- Pro konkrétní hodnoty α a ε potom pro horní hranici počtu pokusů dostáváme:

$$n \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 \cdot \alpha}.$$

Metoda Monte Carlo

- **Př. 4:** Stanovte horní hranici počtu pokusů při odhadu hodnoty π geometrickou metodou pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a maximální přípustnou chybu $\varepsilon_1 = 0{,}1$, resp. $\varepsilon_2 = 0{,}01$.

$$n_1 \leq \frac{1}{4 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}05} = 500,$$

$$n_2 \leq \frac{1}{4 \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}05} = 50\,000.$$

Metoda Monte Carlo

- Vztah pro výpočet horní hranice počtu pokusů získaný na základě Čebyševovy nerovnosti ovšem dává značně vysoké hodnoty počtu pokusů. Pokusme se nyní vyjádřit přesnější odhad pro počet pokusů *n* založeném na centrální limitní větě.

Metoda Monte Carlo

- Definovali jsme si náhodnou proměnnou M, která vyjadřuje počet úspěšných pokusů při *n* realizacích. Řekli jsme, že tato proměnná se řídí binomickým rozdělením a pro její střední hodnotu a rozptyl platí:

  $$EM = n \cdot p, DM = n \cdot p \cdot (1 - p),$$

  kde *n* a *p* jsou parametry rozdělení.

Metoda Monte Carlo

- Zaveďme si nyní náhodnou proměnnou η definovanou vztahem:

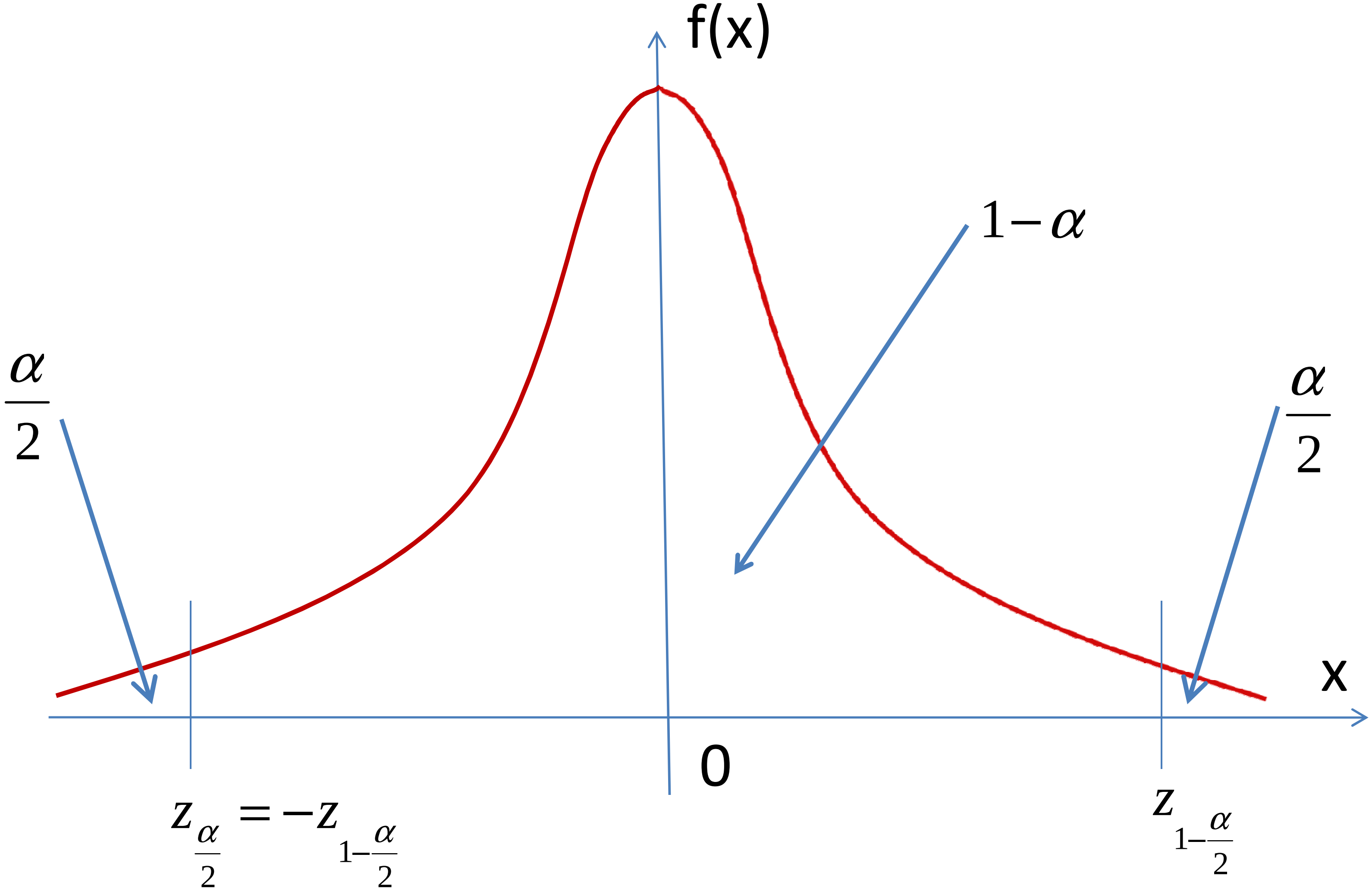
$$\eta = \frac{M - EM}{\sqrt{DM}} = \frac{M - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}.$$

- Pro tuto veličinu bylo dokázáno (Moivreova-Laplaceova věta), že pro $n \rightarrow \infty$ platí:

$$\eta = \frac{M - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}} \rightarrow N(0;1).$$

Veličina η má tedy asymptoticky normované normální rozdělení.

Metoda Monte Carlo



Metoda Monte Carlo

- Na základě obrázku můžeme psát:

$$P\left[z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{M - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = \phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha.$$

kde *z* označuje kvantil normovaného rozdělení pravděpodobnosti, α je hladina významnosti a symbol *Φ* vyjadřuje distribuční funkci normovaného rozdělení.

Metoda Monte Carlo

- Upravme dále levou část výrazu:

$$P\left[z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{M - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = P\left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{M - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] =$$

$$= P\left[\left|\frac{M - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}\right| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = P\left[\left|\frac{\frac{M - n \cdot p}{n}}{\frac{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}{n}}\right| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] =$$

$$= P\left[\left|\frac{M}{n} - p\right| < \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

Metoda Monte Carlo

- Výraz $\left|\frac{M}{n} - p\right|$ označme jako ε a vyjadřuje maximální připustnou chybu. Potom můžeme psát:

$$\varepsilon < \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

z čehož úpravami získáme:

$$n < \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2} \cdot z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \text{resp.}\, n < \frac{1}{4\varepsilon^2} \cdot z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Metoda Monte Carlo

- **Př. 5:** Stanovte horní hranici počtu pokusů při odhadu hodnoty π geometrickou metodou pro hladinu významnosti α = 0,05 a maximální přípustnou chybu $\varepsilon_1 = 0{,}1$, resp. $\varepsilon_2 = 0{,}01$.

- Nejdříve musíme stanovit hodnotu příslušného kvantilu. Z tabulek dostaneme:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975} \doteq 1{,}96.$$

Metoda Monte Carlo

- Nyní již můžeme přistoupit k výpočtu odhadu horní hranice počtu potřebných pokusů:

$$n_1 < \frac{1}{4 \cdot 0{,}1^2} \cdot 1{,}96^2 \doteq 96,$$

$$n_2 < \frac{1}{4 \cdot 0{,}01^2} \cdot 1{,}96^2 = 9604.$$

- Srovnáme-li dosažené výsledky, tak vidíme, že dostáváme mnohem nižší horní hranice počtu pokusů než při výpočtu pomocí Čebyševovy nerovnosti.

Metoda Monte Carlo

- V případě, že stanovujeme odhad pomocí střední hodnoty, lze ke stanovení horní hranice počtu pokusů použít následující postup.
- Uvedli jsme si, že v tomto případě stanovujeme odhad hledané hodnoty jako aritmetický průměr realizací nezávislých náhodných proměnných $X_1, \ldots, X_n$ majících stejné rozdělení se střední hodnotou $EX_1 = \ldots = EX_n = \mu$ a rozptylem $DX_1 = \ldots = DX_n = \sigma^2$.

Metoda Monte Carlo

- Z centrální limitní věty plyne, že veličina $\overline{X}$ má pro $n \to \infty$ asymptoticky normální rozdělení, tedy:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \to N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

- Potom musí zřejmě platit (standardizace normálního rozdělení):

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \to N(0;1).$$

Metoda Monte Carlo

- Musí tedy analogicky jako v předchozím případě platit:

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha.$$

- Upravme analogicky pravou stranu výrazu:

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}\right| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Metoda Monte Carlo

- Položíme-li $\left|\overline{X} - \mu\right| = \varepsilon$, potom dostaneme:

  $$\varepsilon < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

  z čehož úpravami získáme:

  $$n < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

- Jelikož v praxi zpravidla rozptyl neznáme, proto ho nahradíme jeho odhadem – výběrovým rozptylem s^2:

  $$n < \frac{s^2}{\varepsilon^2} \cdot z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$