Řízení projektů

Ing. Michal Dorda, Ph.D.

Použitá literatura

- Tato prezentace byla vytvořena především s využitím následujících zdrojů:
  - ŠIROKÝ, J. Aplikace počítačů v provozu vozidel. Ostrava, VŠB – TU Ostrava 2005. ISBN 80-248-0768-8.
  - WALTER J. et al. Aplikace metod síťové analýzy v řízení a plánování. Praha, SNTL 1989.
  - SAKÁL, P., JERZ, V. Operačná analýza v praxi manažéra. Trnava, SP SYNERGIA 2003. ISBN 80-968734-3-1.

Úvodní poznámky

- Pod pojmem **projekt** chápeme soubor zpravidla velkého počtu dílčích činností, které se navzájem ovlivňují a které musí být realizovány v určitém pořadí v rámci řešení složité úlohy.
- **Projektové řízení** se zaměřuje na problematiku řízení unikátních úloh a nebo může sloužit jako kontrolní mechanismus opakujících se činností.

Úvodní poznámky

- Z hlediska řízení projektu nás může zajímat:
  - Jaké budou celkové náklady na projekt?
  - Bude dodržen předepsaný termín dokončení projektu?
  - Jaké bude využití lidských a jiných zdrojů?
  - Které činnosti jsou důležité z hlediska celkového trvání projektu?

Úvodní poznámky

- Příkladem projektu může být např.:
  - Výstavba nebo rekonstrukce průmyslových objektů.
  - Technická příprava výroby prototypů.
  - Plánování výzkumu a vývoje.
  - Zavádění nových informačních systémů apod.

Úvodní poznámky

- Jelikož se jedná o řízení jedinečných úloh, je jejich realizace spojená s větším rizikem než u opakujících se úloh – nutnost odhadnout doby trvání činností na základě zkušeností apod.
- Jednotlivé činnosti v rámci celé úlohy nespotřebovávají pouze čas, ale i hmotné a lidské zdroje.

Ganttův diagram

- Nejstarší nástroj určený k řízení projektů je Ganttův diagram.
  - Jedná se o pruhový diagram, ve kterém znázorňujeme jednotlivé dílčí činnosti projektu.
  - Každá činnost je reprezentována jedním „pruhem“ diagramu.
  - Délka pruhu odpovídá délce trvání činnosti.
  - Na vodorovné ose je čas v příslušných jednotkách.
  - Jednotlivé činnosti jsou řazeny v závislosti na průběhu projektu.

Ganttův diagram

- **Milník** – definovaný časový okamžik dělící projekt na jednotlivé úseky, je to tedy fiktivní činnost s nulovou dobou trvání, budeme jej označovat jako ◆ .
- Jednotlivé činnosti projektu mohou být navzájem provázány, základní typy vazeb jsou:
  - **None** – úkoly nejsou vázány, mohou běžet paralelně.

Ganttův diagram

- **Finish to Start** (FS) – následující činnost může začít až po skončení činnosti předcházející, tyto vazby se zakreslují šipkou.
- **Finish to Finish** (FF) – činnosti končí ve stejném časovém okamžiku.
- **Start to Start** (SS) – činnosti začínají současně a probíhají paralelně.
- **Start to Finish** (SF) – předcházející činnost může začít až po skončení následující činnosti (obdoba FS).

Ganttův diagram

- Vazby mezi činnostmi mohou být vyjádřeny i s předstihem, příp. zpožděním, např.:
  - Vazba **FS – 50%** - navazující činnost je zahájena, je-li splněno 50% předchozí činnosti.
  - Vazba **SS + 1 den** – zahájení jedné činnosti bude provedeno 1 den po zahájení druhé činnosti.

Ganttův diagram

- Činnosti, které spolu úzce souvisí, můžeme soustředit do souhrnného úkolu.
- Dobu trvání *i*-té činnosti t_i stanovíme buď odhadem, měřením nebo výpočtem.
- Známe-li pro danou činnost dostupné zdroje, můžeme pro výpočet využít základního vztahu:

$$P_i = t_i \cdot U_i ,$$

Ganttův diagram

kde P_i [Nh]… objem práce,

t_i [Nh]... doba trvání činnosti,

U_i [-]… počet jednotek práce, nejčastěji pracovní směna.

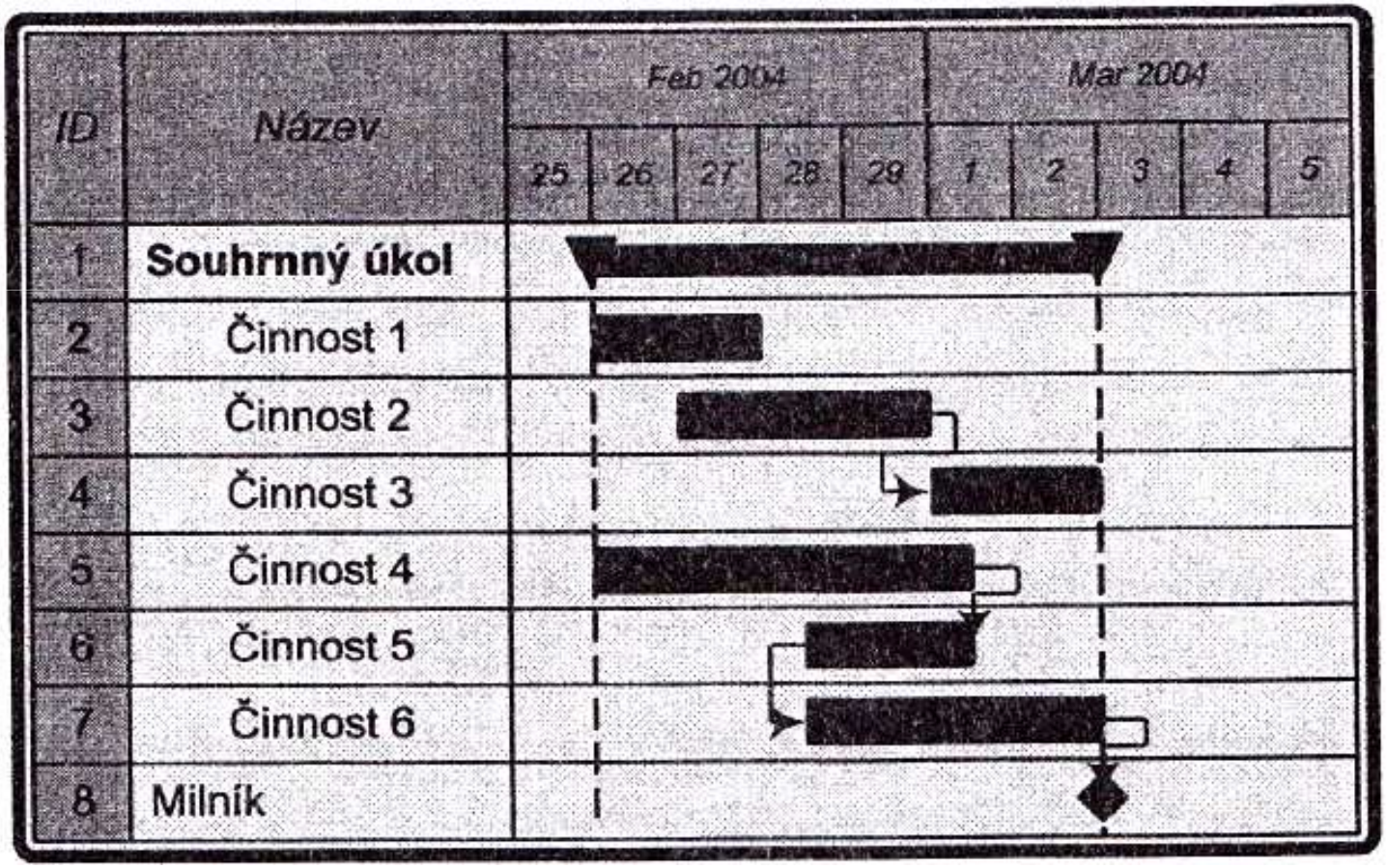
- Pro dobu trvání činnosti potom dostáváme:

$$t_i = \frac{P_i}{U_i} \text{ [Nh].}$$

Ganttův diagram

- Časovou náročnost projektu potom získáme jako časovou vzdálenost mezi počátkem a koncem projektu.
- Pro podrobnější časovou analýzu projektu je možno použít metodu kritické cesty nebo metodu PERT, které budou probrány dále.

Ganttův diagram

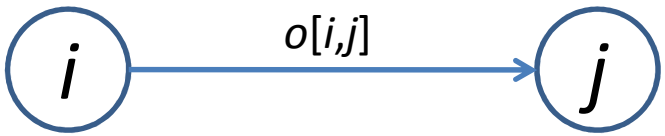


Ganttův diagram

- Na obrázku lze vidět následující vazby:
  - None – vazba mezi činnostmi 1 a 2.
  - Finish to Start – vazba mezi činnostmi 2 a 3.
  - Finish to Finish – vazba mezi činnostmi 4 a 5.
  - Start to Start – vazba mezi činnostmi 5 a 6.

Síťový graf

- **Síťový graf** je prostředkem pro znázornění dílčích činností projektu a vazeb mezi nimi.
  - Dílčí stavy projektu zpravidla vyjadřujeme vrcholy síťového grafu.
  - Činnosti zpravidla znázorňujeme jako orientované hrany grafu.
  - Doba trvání činnosti je potom vyjádřena ohodnocením příslušné hrany.



Síťový graf

- **Počáteční vrchol grafu** je vrchol, ze kterého orientované hrany pouze vystupují, tento vrchol reprezentuje počáteční (výchozí) stav projektu.
- **Koncový vrchol grafu** je vrchol, do kterého orientované hrany pouze vstupují, tento vrchol reprezentuje konečný (cílový) stav projektu.

Síťový graf

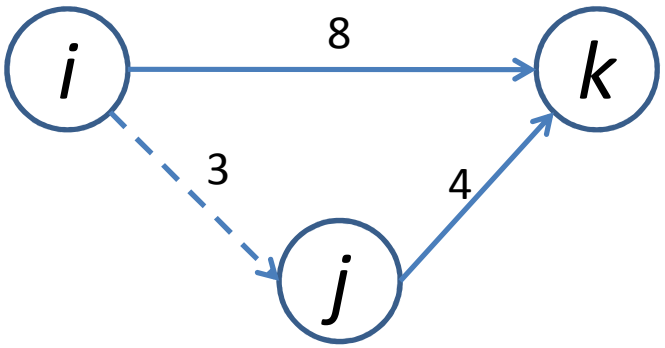
- Síťový graf musí být:
  - Konečný.
  - Souvislý.
  - Orientovaný.
  - Acyklický (v žádné své části nesmí tvořit cyklus).
  - Hranově ohodnocený.
  - Obyčejný (tj. bez násobných hran a smyček).

Síťový graf

- V síťovém grafu rozlišujeme tři druhy hran reprezentující:
  - **Reálné činnosti** – tyto hrany reprezentují skutečné činnosti, trvají tedy určitou dobu a spotřebovávají lidské nebo jiné zdroje.
  - **Fiktivní činnosti** – tyto hrany nepředstavují skutečné činnosti (mají nulovou délku trvání a ani nespotřebovávají zdroje), slouží k vyjádření např. organizačních a jiných vazeb.

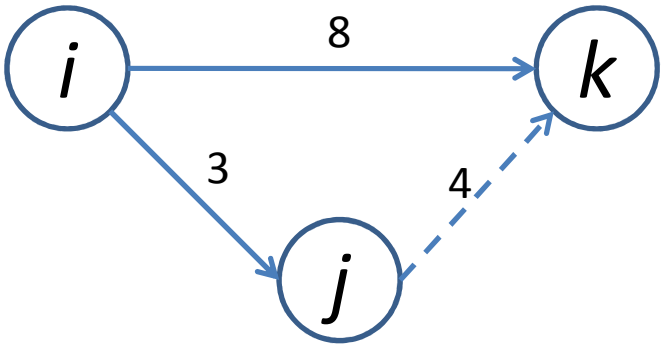
Síťový graf

– **Čekací činnosti** – speciální případ fiktivní hrany s nenulovým trváním, tato činnost se používá, je-li třeba zajistit, že určitá činnost může začínat až po uplynutí určitého času po skončení jiné činnosti.



Činnost [*j*,*k*] může začít nejdříve 3 časové jednotky po začátku činnosti [*i*,*k*].

Síťový graf

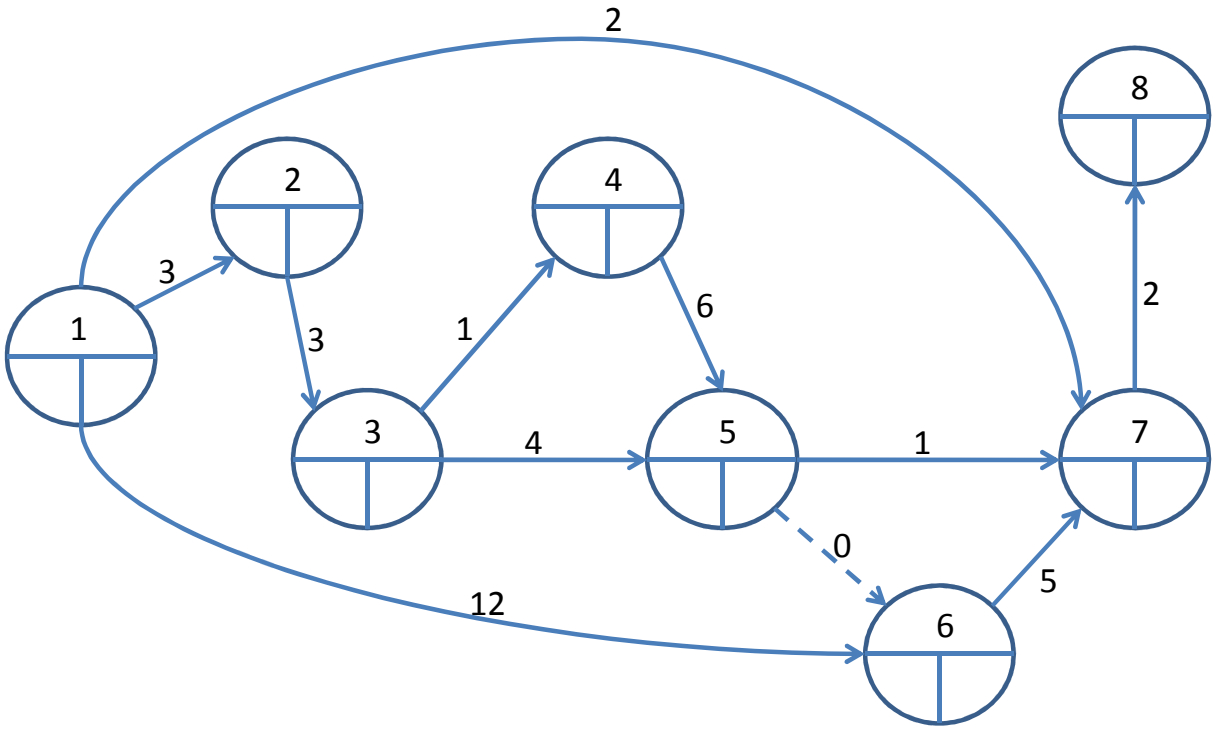


Činnost [*i*,*j*] musí skončit nejdříve 4 časové jednotky před koncem činnosti [*i*,*k*], nejpozději tedy musí začít 1 časovou jednotku od začátku činnosti [*i*,*k*].

- Síťový graf můžeme zobrazit více způsoby, nejčastěji se používá:
  - Grafický zápis (diagram síťového grafu).
  - Tabulkový zápis.

Síťový graf

Činnost	*i*	*j*	*o* [*i*,*j*] [týden]
12	1	2	3
16	1	6	12
17	1	7	2
23	2	3	3
34	3	4	1
35	3	5	4
45	4	5	6
56	5	6	0
57	5	7	1
67	6	7	5
78	7	8	2



Síťový graf

- Při sestavě síťového grafu je nutno znát:
  - Které činnosti bezprostředně předcházejí každé činnosti.
  - Které činnosti bezprostředně následují po každé činnosti.
  - Které činnosti probíhají paralelně.
  - Které činnosti jsou navzájem závislé.

Síťový graf

- **Metoda CPM** (Critical Path Method – Metoda kritické cesty) pracuje s deterministickým trváním činností.
- **Metoda PERT** (Project Evaluation and Review Techniques – Metoda hodnocení a kontroly projektů) pracuje se stochastickým trváním činností.

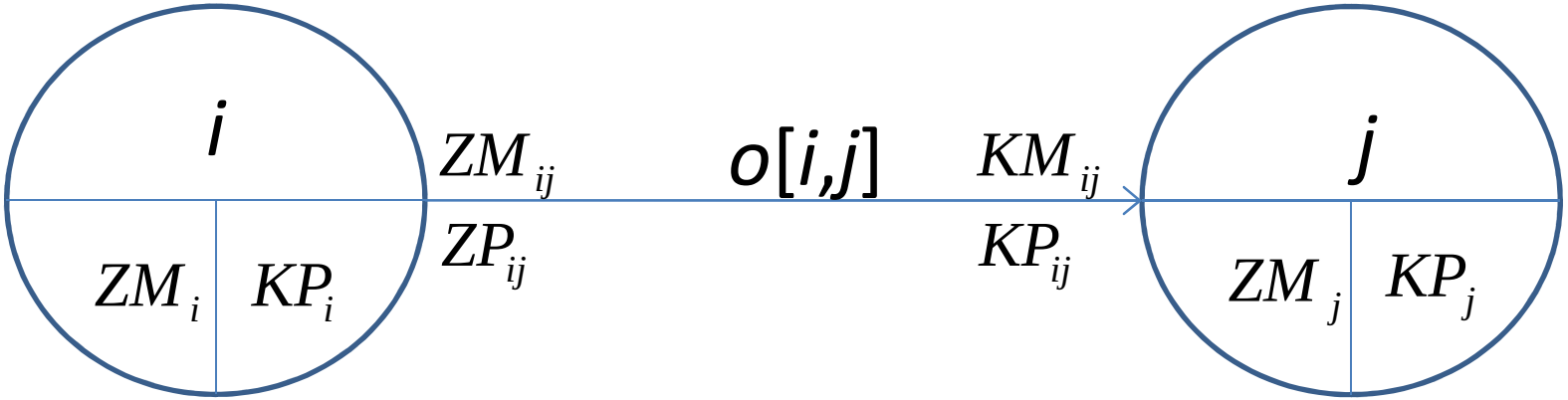
Metoda kritické cesty (CPM)

- Pro potřeby výpočtu zavádíme pro činnosti:
  - $t_{ij}^{(0)}, ZM_{ij}$ – nejdříve možný začátek činnosti [*i,j*].
  - $t_{ij}^{(0)} + o[i, j], KM_{ij}$ – nejdříve možný konec činnosti [*i,j*].
  - $t_{ij}^{(1)}, KP_{ij}$ – nejpozději přípustný konec činnosti [*i,j*].
  - $t_{ij}^{(1)} - o[i, j], ZP_{ij}$ – nejpozději přípustný začátek činnosti [*i,j*].
  - $CR_{ij} = t_{ij}^{(1)} - \{t_{ij}^{(0)} + o[i, j]\} = KP_{ij} - KM_{ij}$ – celková rezerva činnosti [*i,j*].

Metoda kritické cesty (CPM)

- Pro potřeby výpočtu zavádíme pro vrcholy:
  - $t_i^{(0)}, ZM_i$ – nejdříve možný začátek všech činností vycházejících z vrcholu *i*.
  - $t_j^{(1)}, KP_j$ – nejpozději přípustný konec všech činností končících ve vrcholu *j*.
- Pro celý projekt zavádíme:
  - T_0 – čas počátku projektu (zpravidla $T_0 = 0$).
  - T – vypočítaná doba trvání projektu.

Metoda kritické cesty (CPM)



Pro každou činnost platí následující vztahy:

$$ZM_{ij} = ZM_i \,,$$

$$KP_{ij} = KP_j \,.$$

Metoda kritické cesty (CPM)

1) První fáze výpočtu v síťovém grafu probíhá od počátečního vrcholu sítě ke koncovému vrcholu. Počítají se při ní nejdříve možné začátky ZM_j činností vycházejících z vrcholu *j* podle výrazu:

$$ZM_j = \max_i \{KM_{ij}\},$$

přičemž pro počáteční uzel sítě platí:

$$ZM_1 = T_0 \text{ (zpravidla } T_0\text{=0).}$$

Metoda kritické cesty (CPM)

2) Druhá fáze výpočtu probíhá od koncového vrcholu sítě k počátečnímu vrcholu. Počítají se při ní nejpozději přípustné konce KP_i činností končících ve vrcholu *i* podle výrazu:

$$KP_i = \min_j \{ZP_{ij}\},$$

přičemž pro koncový vrchol sítě platí:

$KP_n = ZM_n = T$, kde *T* je celková doba trvání projektu.

Metoda kritické cesty (CPM)

3) V poslední fázi počítáme pro každou činnost celkovou rezervu činnosti podle vztahu:

$$CR_{ij} = KP_{ij} - KM_{ij} = KP_j - ZM_i - o[i, j].$$

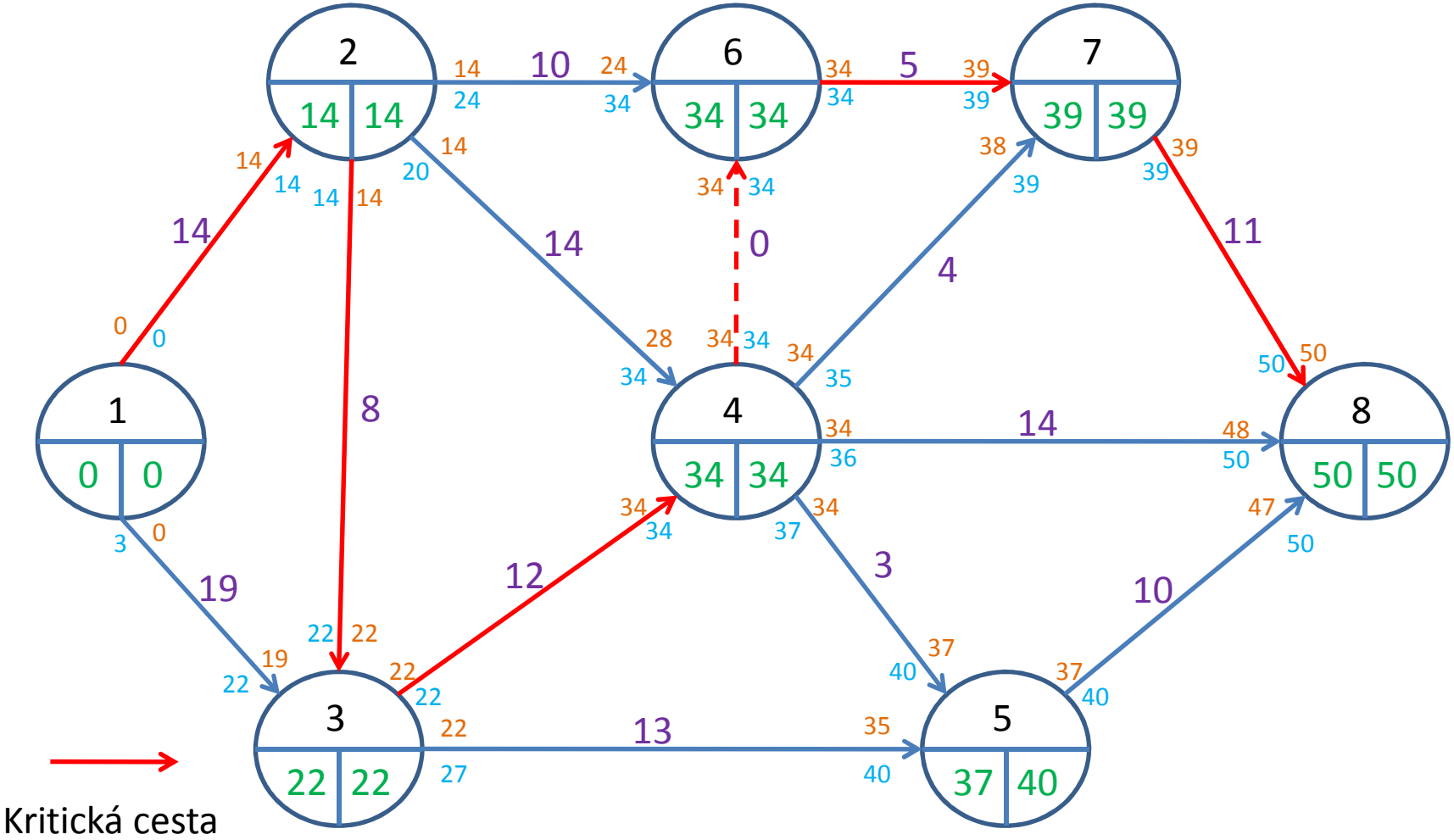
Pro kritické činnosti (tedy činnosti ležící na kritické cestě) platí:

$$CR_{ij} = 0.$$

Metoda kritické cesty (CPM)

- **Př.:** V zadaném síťovém grafu nalezněte kritické činnosti, stanovte dobu trvání projektu a stanovte rezervy činností.

Metoda kritické cesty (CPM)

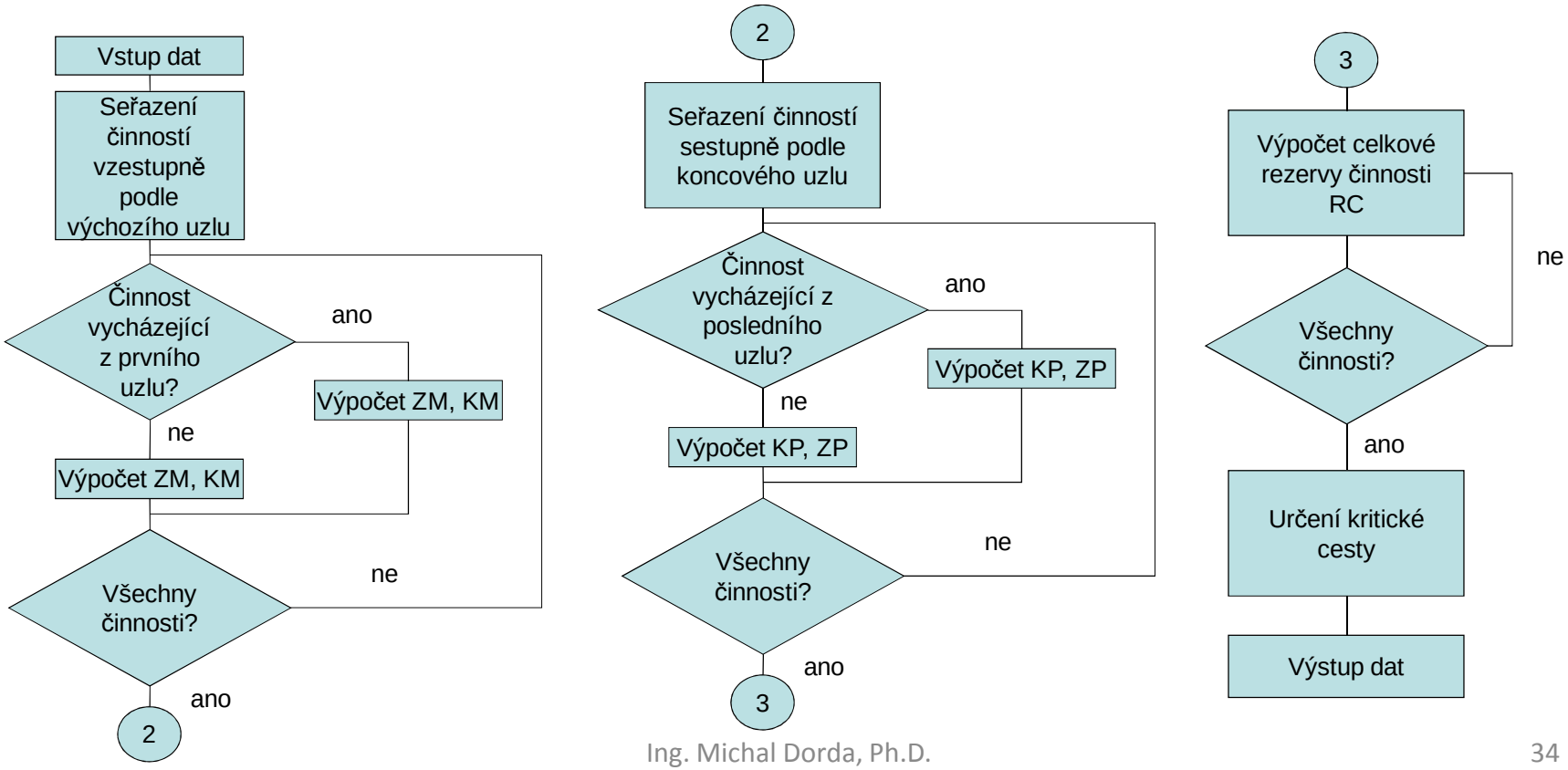


Metoda kritické cesty (CPM)

Činnost	i	j	$o[i,j]$ [týden]	ZM_{ij}	KM_{ij}	ZP_{ij}	KP_{ij}	CR_{ij}
12	1	2	14	0	14	0	14	0
13	1	3	19	0	19	3	22	3
23	2	3	8	14	22	14	22	0
24	2	4	14	14	28	20	34	6
26	2	6	10	14	24	24	34	10
34	3	4	12	22	34	22	34	0
35	3	5	13	22	35	27	40	5
45	4	5	3	34	37	37	40	3
46	4	6	0	34	34	34	34	0
47	4	7	4	34	38	35	39	1
48	4	8	14	34	48	36	50	2
58	5	8	10	37	47	40	50	3
67	6	7	5	34	39	34	39	0
78	7	8	11	39	50	39	50	0

Metoda kritické cesty (CPM)

- Algoritmus výpočtu metody CPM lze znázornit následujícím vývojovým diagramem.

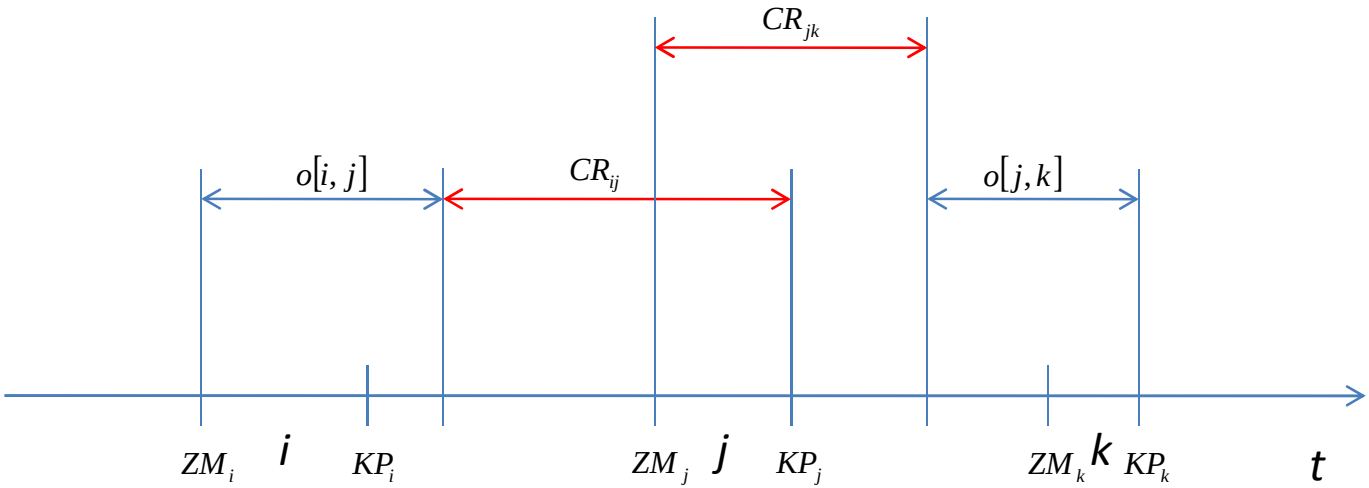


Metoda kritické cesty (CPM)

- Kromě celkové rezervy činnosti, která pro danou činnost udává, o kolik časových jednotek může být činnost prodloužena a nebo posunuta vzhledem k jejímu nejdříve možnému počátku bez toho, aby došlo ke zpoždění termínu ukončení celého projektu, zavádíme další rezervy.

Metoda kritické cesty (CPM)

- Nevýhodou celkové rezervy činnosti je, že vypočítaná hodnota celkové rezervy dané činnosti může nabývat vypočítané hodnoty pouze tehdy, nebudou-li využity celkové rezervy dalších činností.

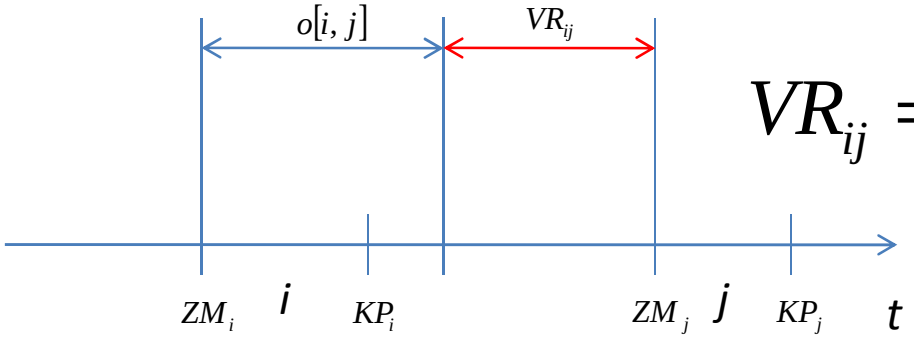


Metoda kritické cesty (CPM)

- Z předchozího obrázku je zřejmé, že pokud využijeme celkovou rezervu činnosti [*i*,*j*], nebudeme již mít k dispozici celou hodnotu vypočítané celkové rezervy činnosti [*j*,*k*].
- Proto zavádíme další rezervy:
  - **Volná rezerva** činnosti [*i*,*j*] – VR_{ij}.
  - **Nezávislá rezerva** činnosti [*i*,*j*] – NR_{ij}.
  - **Závislá rezerva** činnosti [*i*,*j*] – ZR_{ij}.

Metoda kritické cesty (CPM)

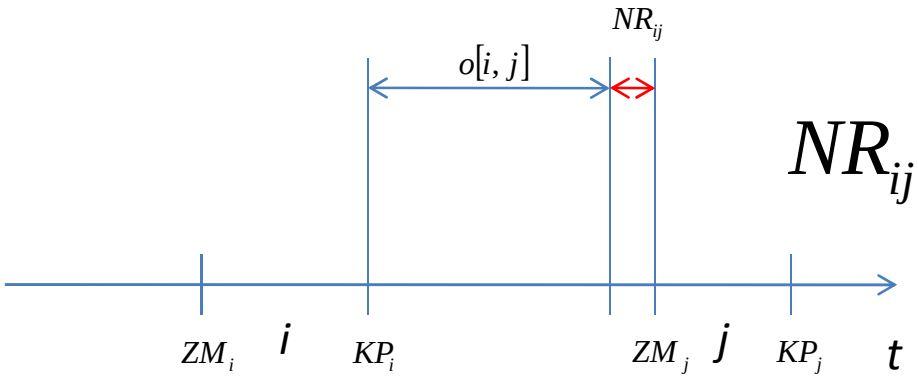
- Volná rezerva činnosti udává, o kolik je možno prodloužit trvání činnosti nebo posunout její začátek vzhledem k jejímu nejdříve možnému začátku bez toho, aby se změnil nejdříve možný začátek všech bezprostředně následujících činností.



$$VR_{ij} = ZM_j - ZM_i - o[i, j].$$

Metoda kritické cesty (CPM)

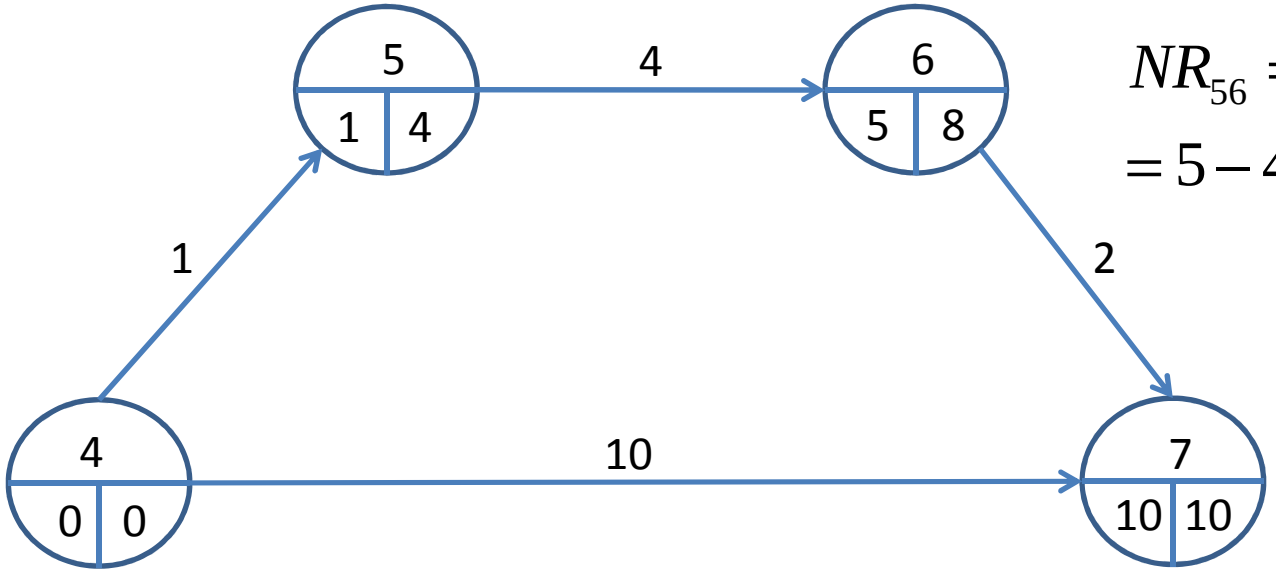
- Nezávislá rezerva činnosti udává, o kolik je možno prodloužit trvání činnosti nebo posunout její začátek, aniž by se změnil nejdříve možný začátek všech bezprostředně následujících činností a nejpozději přípustný konec všech bezprostředně předcházejících činností.



$$NR_{ij} = ZM_j - KP_i - o[i, j].$$

Metoda kritické cesty (CPM)

- Nezávislá rezerva může být záporná, jak lze vidět na následujícím příkladu.



$$NR_{56} = ZM_6 - KP_5 - o[5,6] =$$
$$= 5 - 4 - 4 = -3.$$

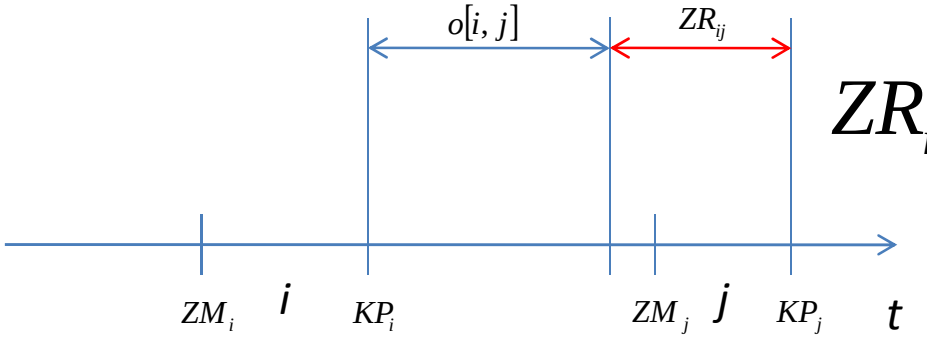
Metoda kritické cesty (CPM)

- Abychom se vyhnuli záporným časovým rezervám, určujeme nezávislou rezervu podle vztahu:

$$NR_{ij} = \max\{0; ZM_j - KP_i - o[i, j]\}.$$

Metoda kritické cesty (CPM)

- Závislá rezerva činnosti udává, o kolik lze prodloužit trvání činnosti nebo posunout její začátek vzhledem k nejpozději přípustnému konci bezprostředně předcházejících činností tak, aby se nezměnil nejpozději přípustný začátek bezprostředně následujících činností.



$$ZR_{ij} = KP_j - KP_i - o[i, j].$$

Metoda kritické cesty (CPM)

Činnost	i	j	$o[i,j]$ [týden]	ZM_{ij}	KM_{ij}	ZP_{ij}	KP_{ij}	CR_{ij}	Termíny vrcholů				VR_{ij}	NR_{ij}	ZR_{ij}
									nejdříve možný		nejpozději přípustný				
									i	j	i	j			
12	1	2	14	0	14	0	14	0	0	14	0	14	0	0	0
13	1	3	19	0	19	3	22	3	0	22	0	22	3	3	3
23	2	3	8	14	22	14	22	0	14	22	14	22	0	0	0
24	2	4	14	14	28	20	34	6	14	34	14	34	6	6	6
26	2	6	10	14	24	24	34	10	14	34	14	34	10	10	10
34	3	4	12	22	34	22	34	0	22	34	22	34	0	0	0
35	3	5	13	22	35	27	40	5	22	37	22	40	2	2	5
45	4	5	3	34	37	37	40	3	34	37	34	40	0	0	3
46	4	6	0	34	34	34	34	0	34	34	34	34	0	0	0
47	4	7	4	34	38	35	39	1	34	39	34	39	1	1	1
48	4	8	14	34	48	36	50	2	34	50	34	50	2	2	2
58	5	8	10	37	47	40	50	3	37	50	40	50	3	0	0
67	6	7	5	34	39	34	39	0	34	39	34	39	0	0	0
78	7	8	11	39	50	39	50	0	39	50	39	50	0	0	0

Metoda kritické cesty (CPM)

- Vyčerpání volné rezervy činnosti [*i*,*j*] nemá vliv na celkovou rezervu činností vycházejících z vrcholu *j*.
- Nezávislá rezerva činnosti [*i*,*j*] udává maximální možné prodloužení nebo posunutí činnosti bez oddalování nebo prodlužování následujících činností za předpokladu, že předcházející činnosti končí co možná nejpozději.
- Závislá rezerva udává maximální posunutí nebo prodloužení činnosti, které neovlivní trvání projektu, pokud došlo k využití rezerv předcházejících činností.

Metoda kritické cesty (CPM)

- Doposud jsme se zabývali pouze časovým hlediskem, při praktických aplikacích nás ale kromě času mohou zajímat i náklady vynaložené na realizaci projektu.
- Předpokládejme, že zkrácením doby trvání činnosti dojde k nárůstu přímých nákladů pro realizaci dané činnosti.

Metoda kritické cesty (CPM)

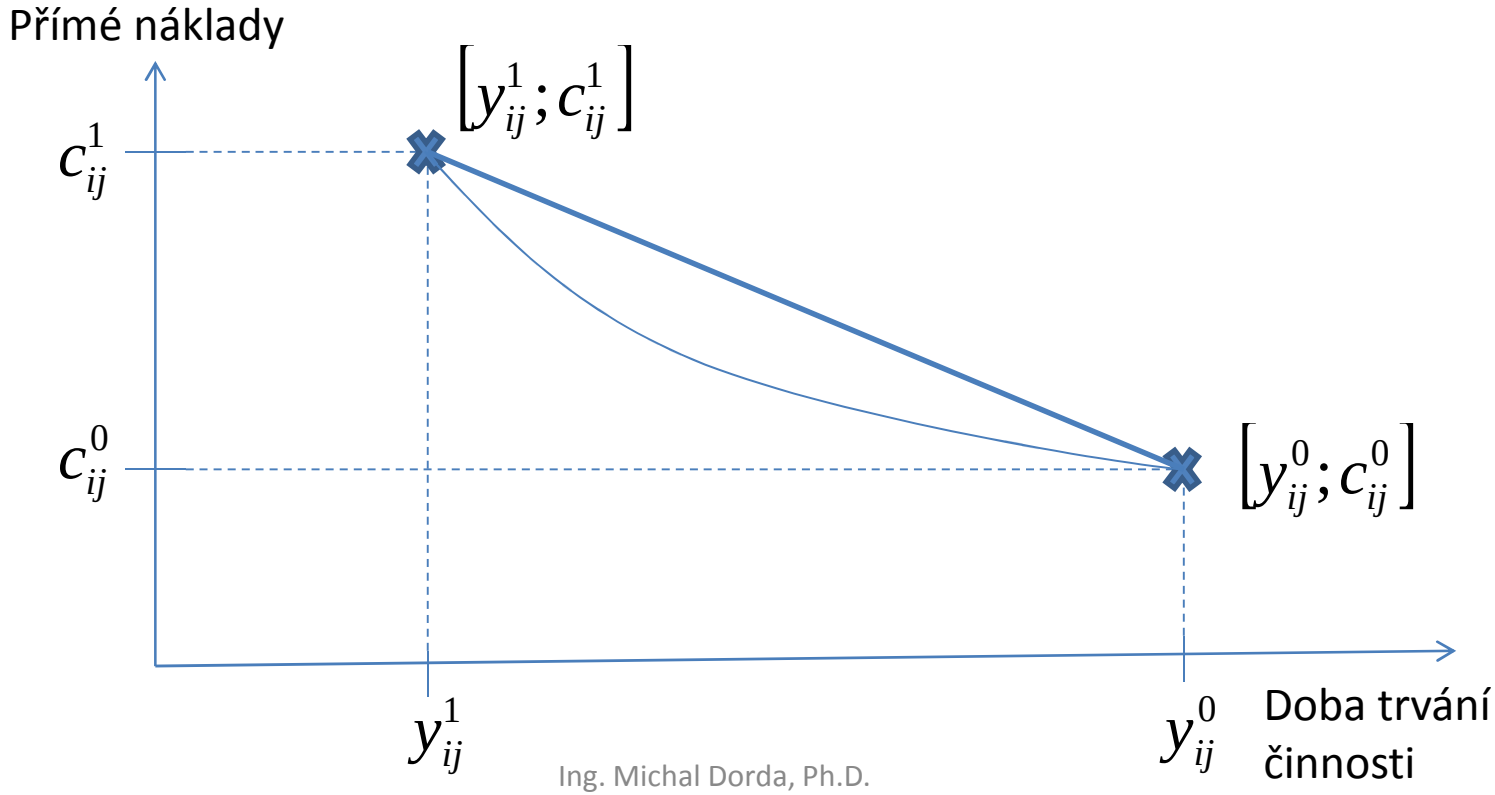
- Zaveďme následující značení – viz tabulka.

Možnost realizace činnosti	Doba trvání činnosti	Přímé náklady na realizaci činnosti
Pomalá	y_{ij}^{0}	c_{ij}^{0}
Rychlá	y_{ij}^{1}	c_{ij}^{1}

- Uvažujme, že platí $y_{ij}^{0} > y_{ij}^{1}$ a $c_{ij}^{0} < c_{ij}^{1}$.

Metoda kritické cesty (CPM)

- Potom můžeme závislost přímých nákladů a doby trvání znázornit následujícím obrázkem.



Metoda kritické cesty (CPM)

- Závislost přímých nákladů na době trvání budeme nazývat nákladovou funkcí. Pro jednoduchost budeme skutečnou nákladovou funkci aproximovat přímkou.
- **Nákladovou funkci** můžeme na základě předchozího obrázku vyjádřit ve tvaru:

$$c_{ij} = \frac{c_{ij}^1 - c_{ij}^0}{y_{ij}^1 - y_{ij}^0} \cdot y_{ij} + \frac{c_{ij}^0 \cdot y_{ij}^1 - c_{ij}^1 \cdot c_{ij}^0}{y_{ij}^1 - y_{ij}^0}.$$

Metoda kritické cesty (CPM)

- Jelikož platí, že $y_{ij}^0 > y_{ij}^1$ a $c_{ij}^0 < c_{ij}^1$, je zřejmé, že směrnice přímky je záporná, což odpovídá obrázku. Směrnice nákladové funkce nám udává, jaké jsou přímé náklady spojené s jednotkovým zkrácením příslušné činnosti. My však budeme uvažovat kladnou veličinu, kterou budeme nazývat **nákladový spád** k_{ij}^{0-1}:

$$k_{ij}^{0-1} = \frac{c_{ij}^1 - c_{ij}^0}{y_{ij}^0 - y_{ij}^1}.$$

Metoda kritické cesty (CPM)

- Je zřejmé, že vynaložíme-li větší náklady na realizaci činnosti, dojde k jejímu zkrácení. Je třeba si však uvědomit, že ne vždy platí, že zkrácení realizace činnosti vede ke zkrácení trvání celého projektu. Dojde-li ke zkrácení činnosti neležící na kritické cestě, zvýšíme sice náklady jak na realizaci dané činnosti, tak na realizaci celého projektu, ovšem bez efektu na celkovou dobu trvání projektu.

Metoda kritické cesty (CPM)

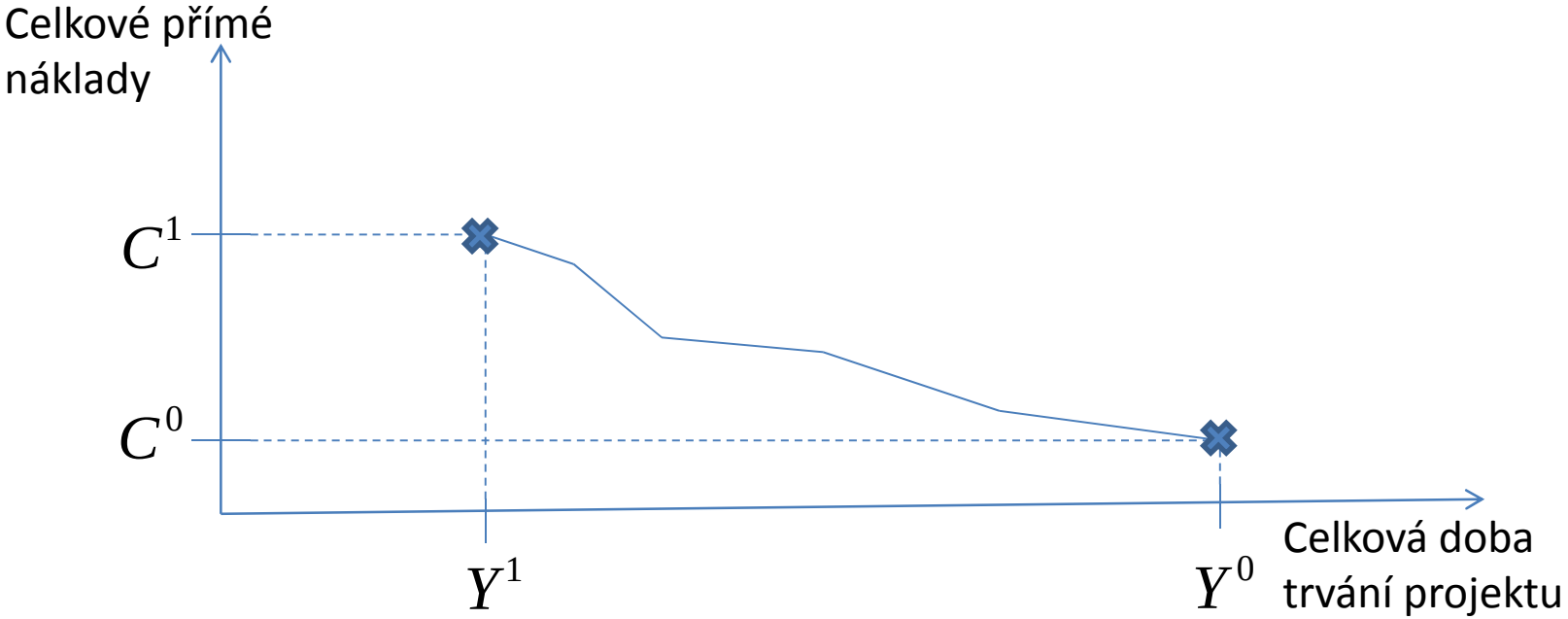
- Uvažujme následující předběžný postup:
  1) Všem činnostem projektu přiřadíme nejdelší možné trvání y_{ij}^0 a tedy i nejnižší přímé náklady c_{ij}^0. Celkové přímé náklady projektu C^0 zřejmě budou rovny součtu nákladů všech činností. Dále známým způsobem nalezneme v síti kritickou cestu a její délku Y^0.

Metoda kritické cesty (CPM)

2) Vyberme nyní libovolnou činnost ležící na kritické cestě a navrhněme její zkrácení z původní hodnoty y_{ij}^{0} na hodnotu y_{ij}^{1}, což vede ke zvýšení přímých nákladů z hodnoty c_{ij}^{0} na hodnotu c_{ij}^{1}. Přepočítáme kritickou cestu (jelikož došlo ke zkrácení činnosti ležící na kritické cestě).
3) Postup můžeme opakovat až do té doby, kdy již není možno činnosti ležící na kritické cestě zkracovat. Dostáváme celkové přímé náklady C^1 při celkové době trvání projektu Y^1.

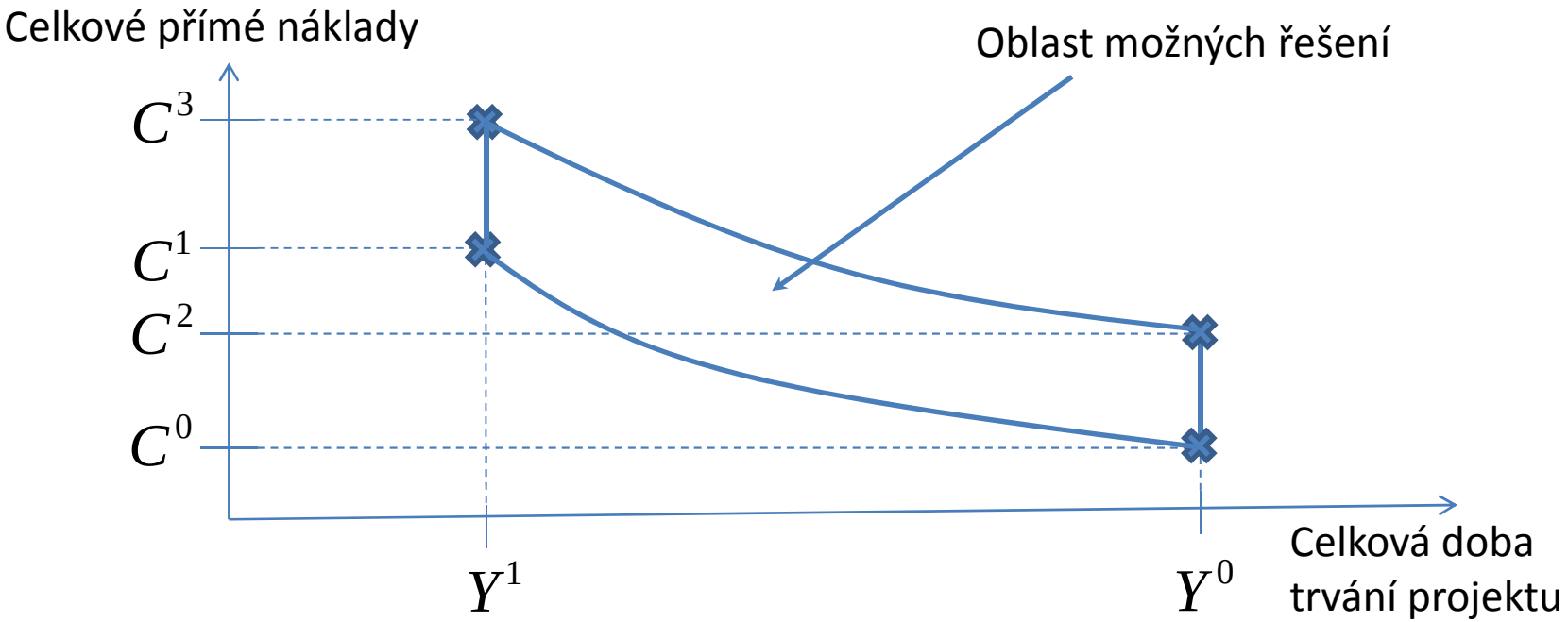
Metoda kritické cesty (CPM)

- Je zřejmé, že postupným navyšováním přímých nákladů činností ležících na kritické cestě jsme snížili celkovou dobu trvání projektu.



Metoda kritické cesty (CPM)

- Na spodním obrázku je přibližně znázorněna oblast všech možných řešení.



Metoda kritické cesty (CPM)

- Oblast možných řešení má 4 krajní body. Body $[Y_0,C_0]$ a $[Y_1,C_1]$ jsme se už zabývali. Bod $[Y_0,C_2]$ bychom získali, kdybychom navýšili přímé náklady pro všechny činnosti neležící na kritické cestě – došlo by pouze k navýšení jejich rezerv, ke zkrácení doby trvání projektu by nedošlo.

Metoda kritické cesty (CPM)

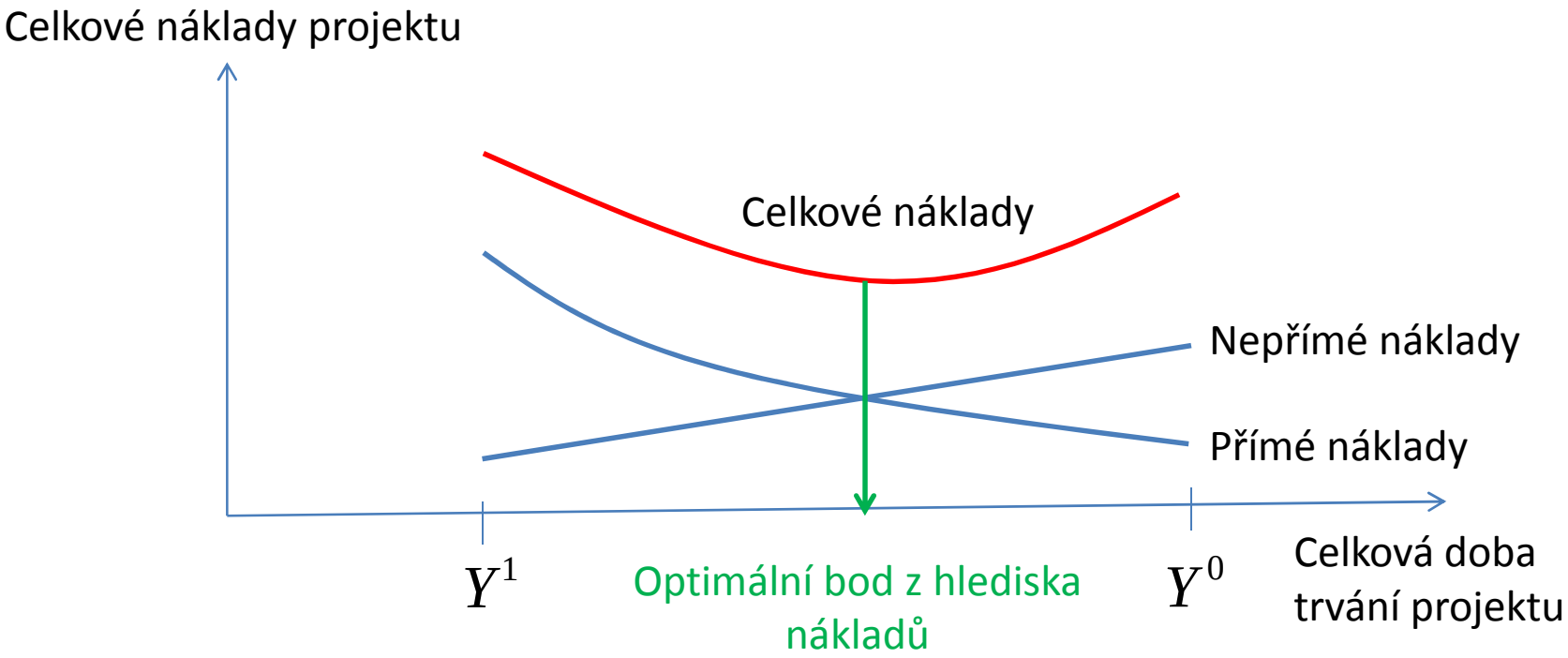
- Bod [Y_1,C_3] bychom získali, kdybychom kromě kritických činností zkracovali (a tedy navyšovali náklady) i pro všechny nekritické činnosti.
- Pro nás bude zajímavá dolní hrana obrazce. Nyní by nás zajímala, jaká je optimální hodnota nákladů.
- Doposud jsme hovořili pouze o přímých nákladech, ale je třeba uvažovat i nepřímé náklady spojených s trváním celého projektu.

Metoda kritické cesty (CPM)

- Budeme uvažovat, že nepřímé náklady projektu jsou v čase konstantní, jejich celková hodnota závisí pouze na délce trvání celého projektu. Označme nepřímé náklady projektu jako *k* a budou udávat hodnotu nepřímých nákladů na jednotku času.

Metoda kritické cesty (CPM)

- Průběh celkových nákladů projektu můžeme znázornit následujícím obrázkem.



Metoda kritické cesty (CPM)

- Naší snahou bude najít tento optimální bod vzhledem k nákladům projektu.
- Přibližný postup vedoucí k nalezení tohoto bodu lze popsat následujícím algoritmem:
  1) Nalezněte a stanovte délku kritické cesty pro síť ohodnocenou trváním y_{ij}^0 a náklady c_{ij}^0 . Takto dostaneme výchozí stav s celkovou dobou trvání Y_0 a s celkovými náklady C^0. Postup na krok 2).

Metoda kritické cesty (CPM)

2) Vyhledejte v síti kritickou činnost s minimálním nákladovým spádem k_{ij}. Postup na krok 3)
3) Platí-li pro vybranou kritickou činnost, že $k_{ij} < k$, potom provedeme zkrácení příslušné činnosti, tj. doba trvání činnosti bude y_{ij}^{1} a vypočteme v síti novou kritickou cestu. Současně upravíme celkové náklady projektu – celkové náklady projektu se zvýší o rozdíl $c_{ij}^{1} - c_{ij}^{0}$ a současně sníží o hodnotu nepřímých nákladů odpovídající případnému zkrácení doby trvání projektu. Postup na krok 4).

Metoda kritické cesty (CPM)

4) V síti vyhledáme další kritickou činnost, kterou je možno zkracovat a pro kterou platí $k_{ij} < k$. Existuje-li taková činnost, potom se vracíme na krok 3), v opačném případě je výpočet ukončen.

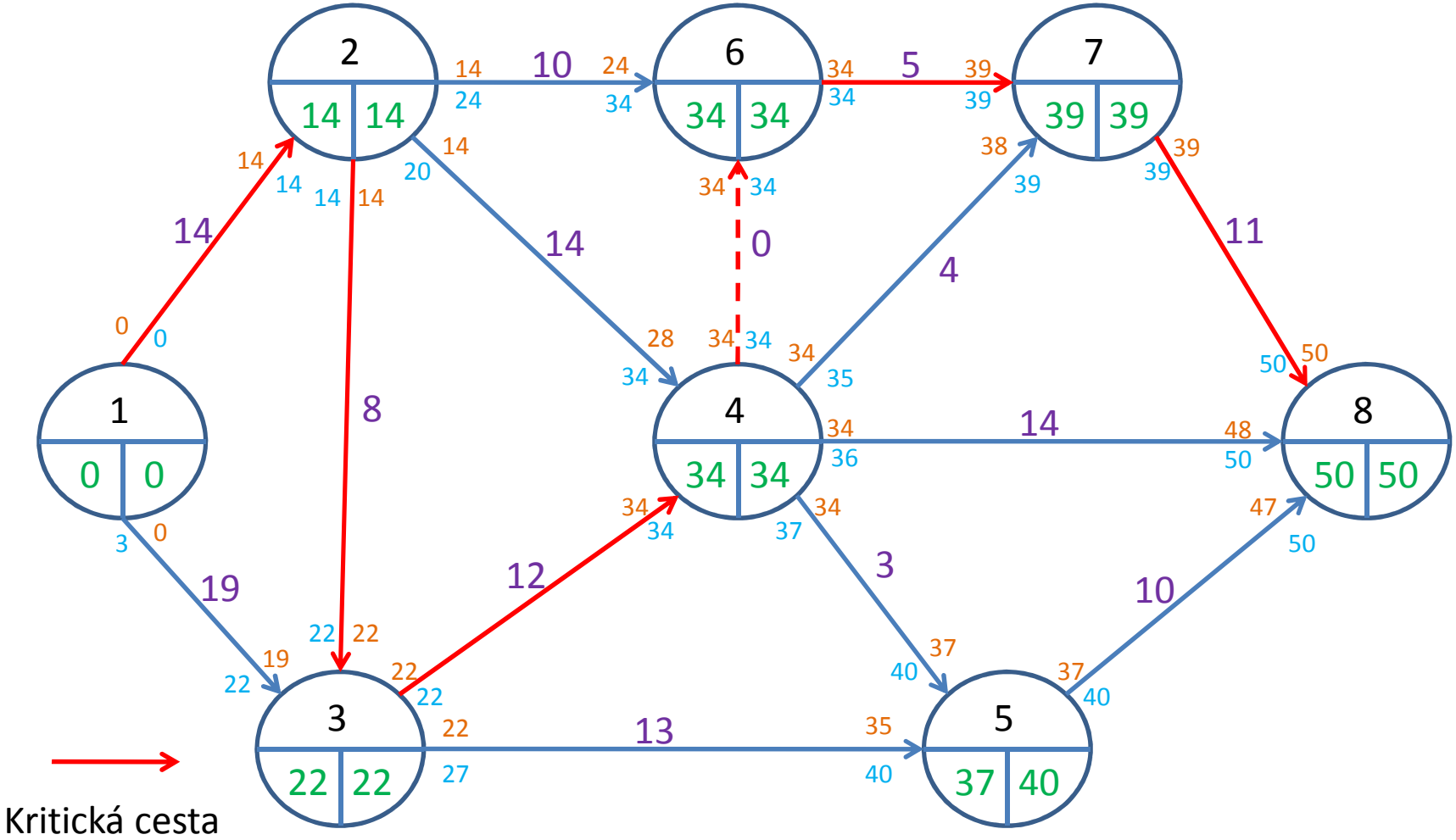
Metoda kritické cesty (CPM)

- **Př.:** Je dán síťový graf projektu. Nalezněte takové trvání projektu, aby se minimalizovaly celkové náklady projektu. Uvažujte, že každá činnost může být zkrácena pouze jednou, některé činnosti zkrácení neumožňují – viz údaje v tabulce. Časovou jednotkou je 1 týden, uvažujte, že nepřímé náklady činí 10 000 Kč za týden, tedy k = 10 tis. Kč/týden.

Metoda kritické cesty (CPM)

Činnost	i	j	y^0 [týden]	y^n [týden]	c^0 [tis. Kč]	c^n [tis. Kč]	k [tis. Kč/týden]
12	1	2	14	10	33	49	4
13	1	3	19	17	62	86	12
23	2	3	8	7	44	58	14
24	2	4	14	9	20	40	4
26	2	6	10	8	90	105	7,5
34	3	4	12	10	73	78	2,5
35	3	5	13	10	105	140	15
45	4	5	3	3	48	48	-
46	4	6	0	0	0	0	-
47	4	7	4	4	68	68	-
48	4	8	14	12	112	116	2
58	5	8	10	9	70	90	20
67	6	7	5	3	20	36	8
78	7	8	11	8	60	75	5

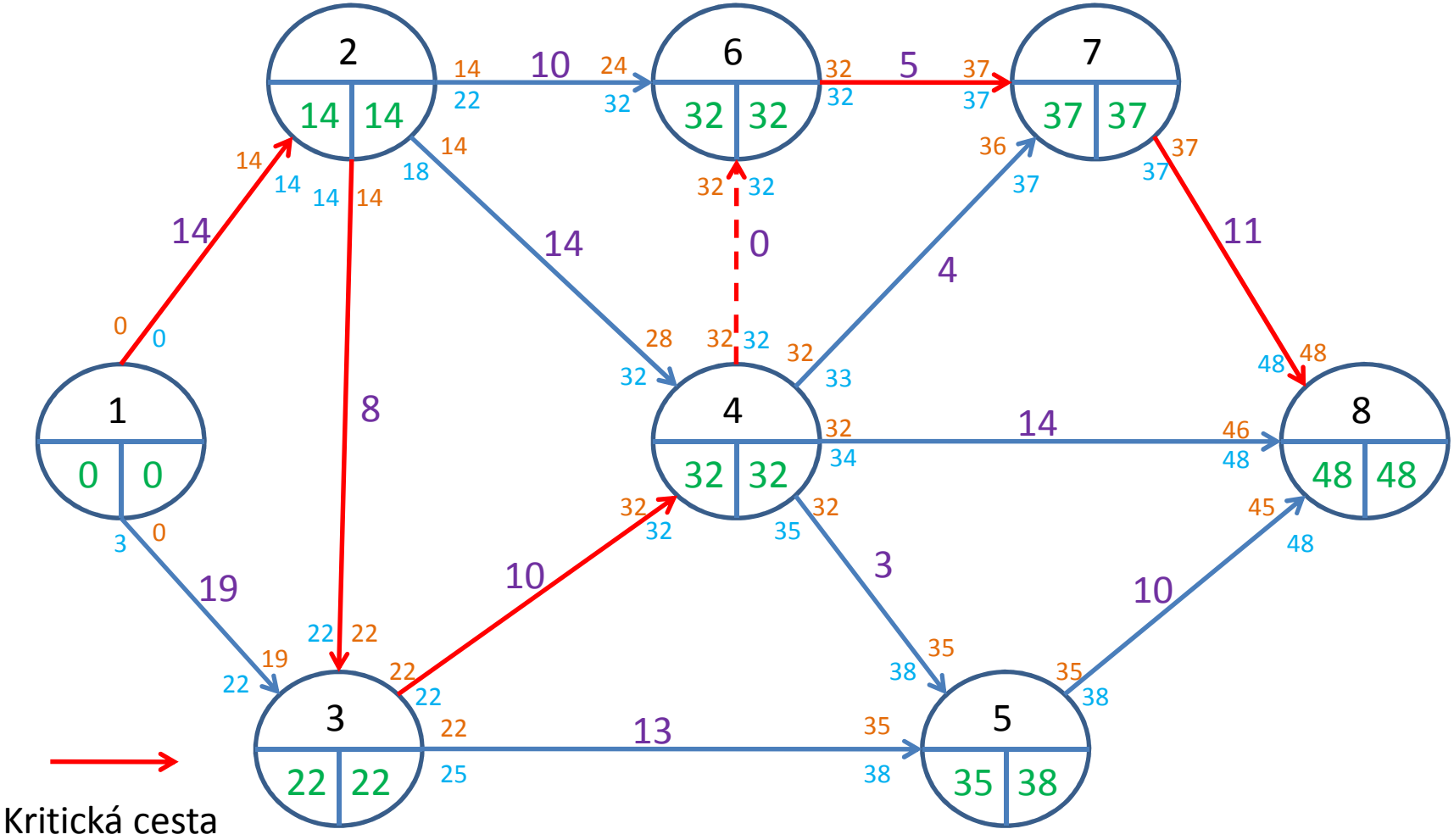
Metoda kritické cesty (CPM)



Metoda kritické cesty (CPM)

- Nalezením kritické cesty jsme zjistili, že doba trvání projektu činí 50 týdnů. Sečteme-li přímé náklady jednotlivých činností a připočteme-li nepřímé náklady za toto období, dostaneme celkové náklady projektu ve výši 1 305 000 Kč.
- Jako první navrhneme zkrácení kritické činnosti [3,4], jelikož má nejmenší nákladový spád ze všech kritických činností a vyhledáme kritickou cestu.

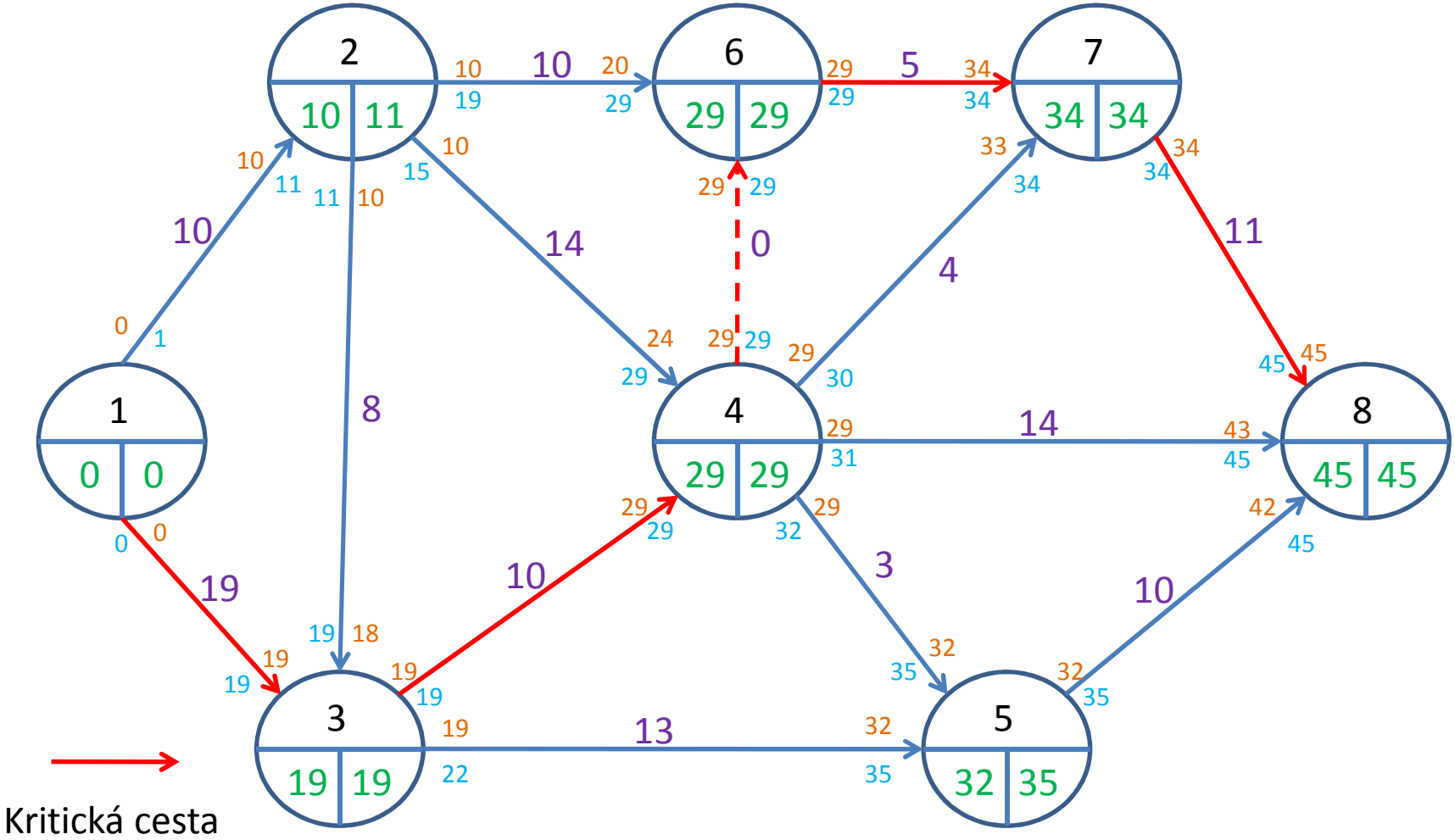
Metoda kritické cesty (CPM)



Metoda kritické cesty (CPM)

- Vidíme, že po zkrácení činnosti [3,4] došlo ke zkrácení celého projektu o 2 týdny na 48 týdnů, průběh kritické cesty zůstal stejný, zkrácením činnosti jsme navýšili přímé náklady o 5 000 Kč a snížili nepřímé náklady o 20 000 Kč, celkové náklady projektu tedy činí 1 290 000 Kč.
- Jako další navrhneme zkrácení činnosti [1,2].

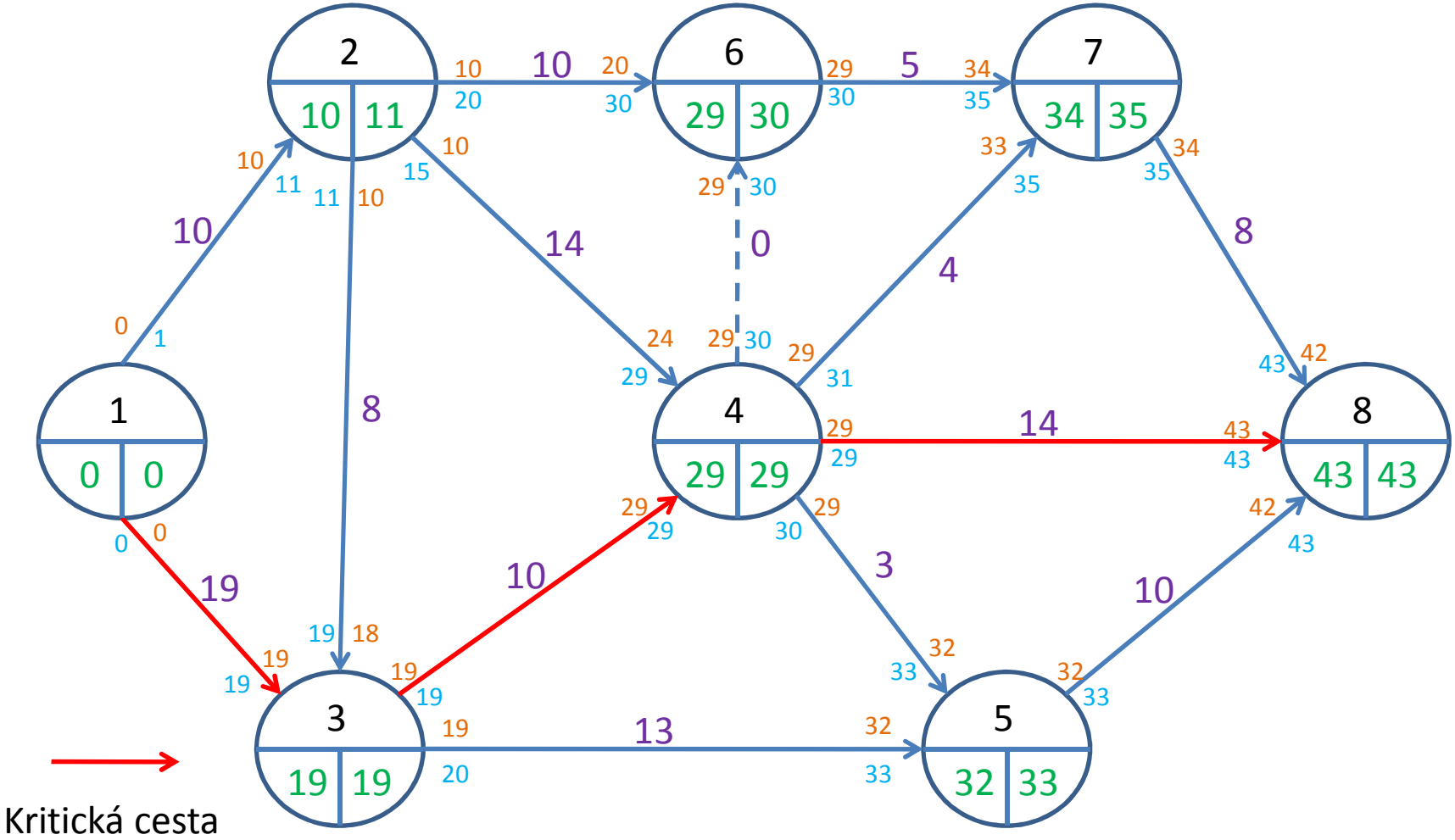
Metoda kritické cesty (CPM)



Metoda kritické cesty (CPM)

- Zkrácením činnosti [1,2] došlo ke zkrácení projektu o 3 týdny a ke změně kritické cesty. Došlo k navýšení přímých nákladů o 16 000 Kč a ke snížení nepřímých nákladů o 30 000 Kč, celkové náklady projektu nyní činí 1 276 000 Kč.
- Nyní navrhneme zkrácení činnosti [7,8].

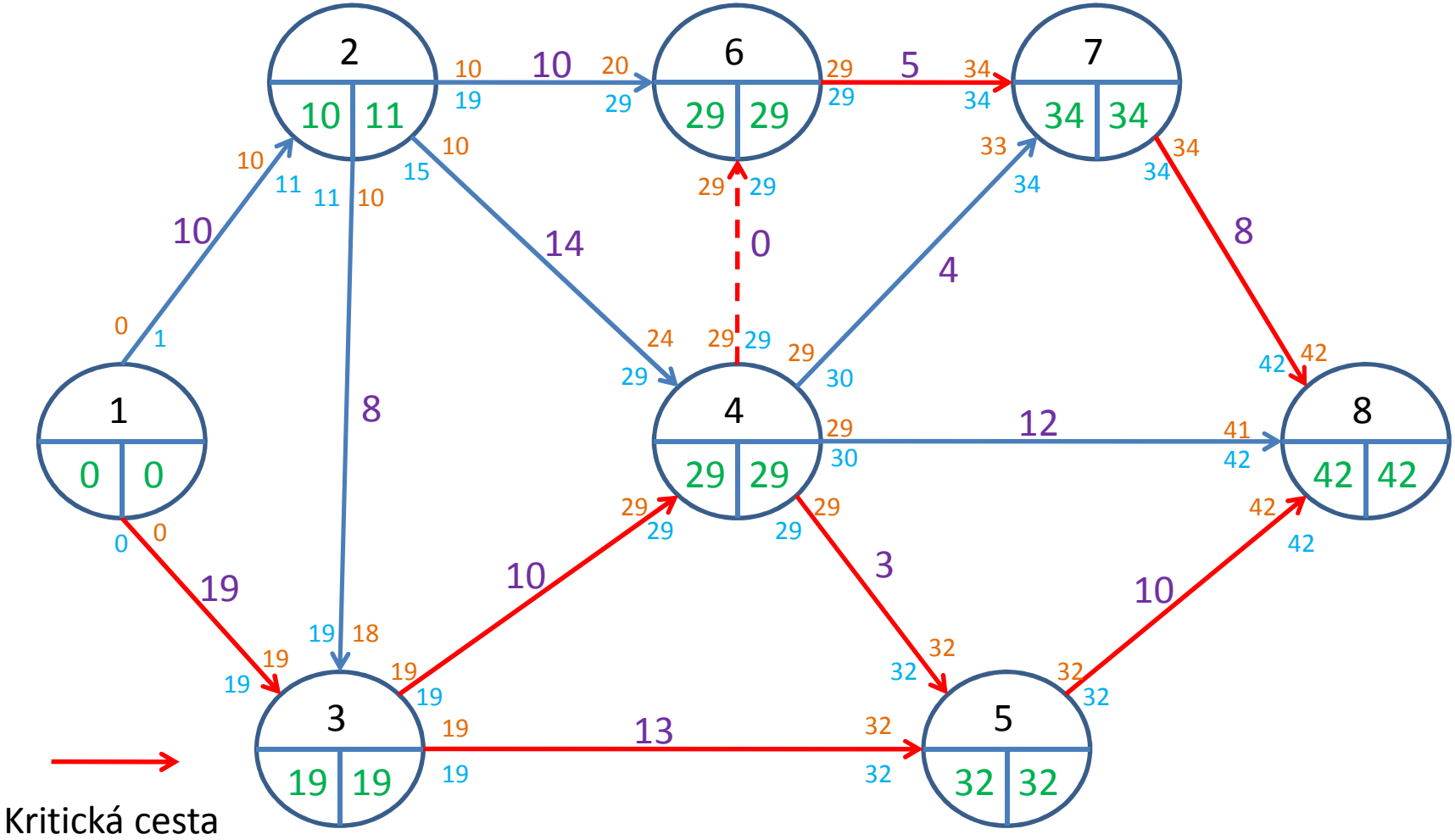
Metoda kritické cesty (CPM)



Metoda kritické cesty (CPM)

- Zkrácením činnosti [7,8] došlo ke zkrácení doby trvání projektu o 2 týdny a došlo ke změně kritické cesty. Přímé náklady vzrostly o 15 000 Kč a nepřímé náklady poklesly o 20 000 Kč. Celkové náklady projektu jsou tedy rovny 1 271 000 Kč.
- Jako další v pořadí navrhneme zkrácení činnosti [4,8].

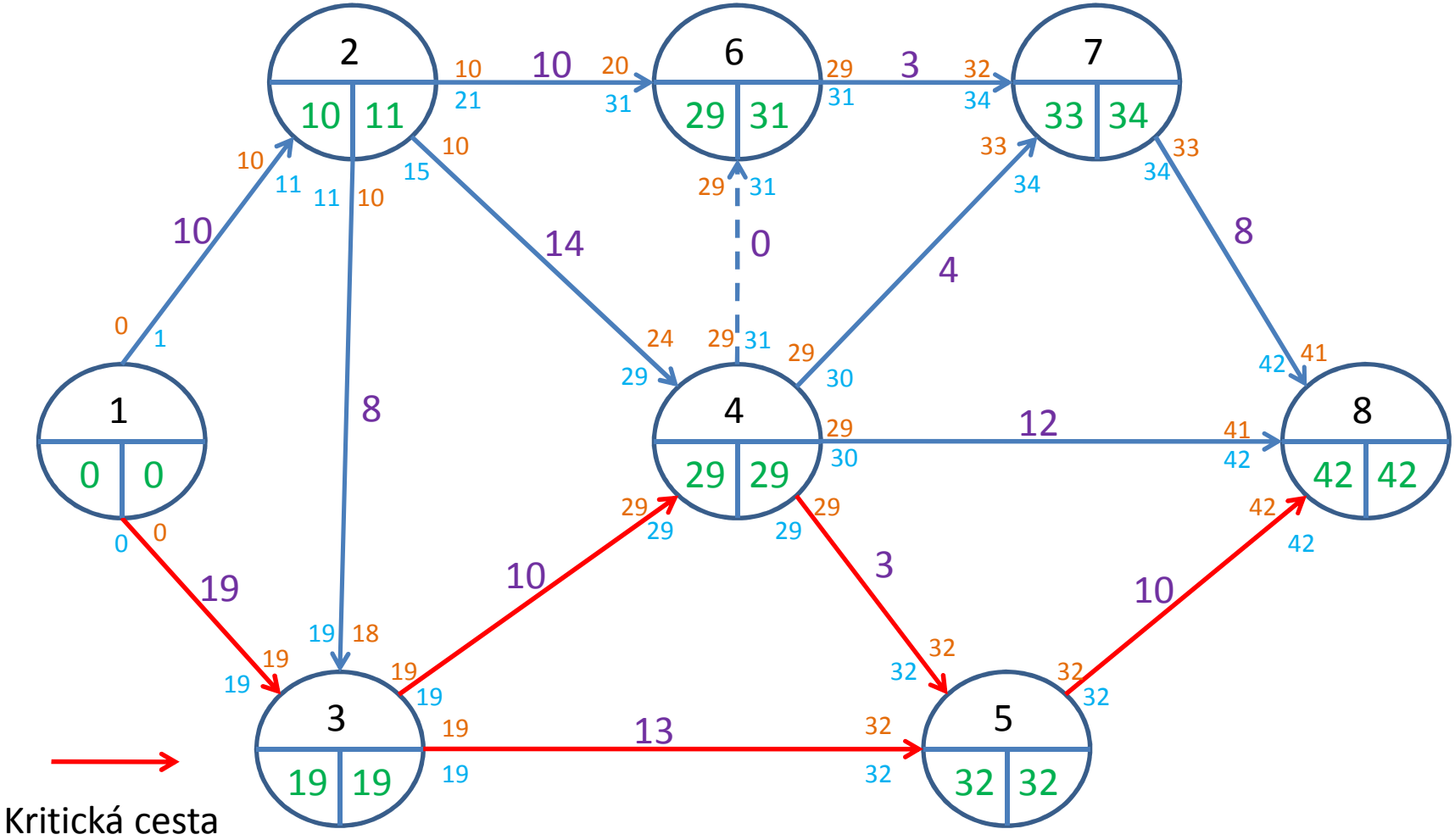
Metoda kritické cesty (CPM)



Metoda kritické cesty (CPM)

- Zkrácením trvání činnosti [4,8] došlo ke zkrácení projektu o 1 týden na 42 týdnů a ke změně kritické cesty. Přímé náklady se zvýšily o 4 000 Kč a nepřímé náklady klesly o 10 000 Kč, celkové náklady projektu tedy činí 1 265 000 Kč.
- Jako další navrhneme zkrácení činnosti [6,7].

Metoda kritické cesty (CPM)



Metoda kritické cesty (CPM)

- Zkrácením činnosti [6,7] nedošlo ke zkrácení trvání celého projektu, ke změně kritické cesty došlo. Přímé náklady vzrostly o 16 000 Kč, k poklesu nepřímých nákladů nedošlo. Celkové náklady projektu jsou rovny 1 281 000 Kč.
- Dalším zkracováním činností bychom ještě docílili zkrácení doby trvání projektu, ale již s rostoucími celkovými náklady projektu.

Metoda kritické cesty (CPM)

- Zkrácením činností [3,4], [1,2], [7,8] a [4,8] jsme dosáhli hodnoty celkových nákladů ve výši 1 265 000 Kč při délce trvání projektu 42 týdnů.

Metoda PERT

- Metoda PERT je modifikací metody CPM. Podstatný rozdíl je v tom, že metoda PERT pracuje se stochastickou dobou trvání činností.
- Předpokládá se, že doba trvání činnosti se řídí beta rozdělením. Toto rozdělení je spojité a unimodální (má pouze jeden modus).

Metoda PERT

- Beta rozdělení (zobecněné) je definováno 4 parametry:
  - Parametry α>0 a β>0 se nazývají parametry tvaru.
  - Parametry *a* a *b*, kde *a*>0, *b*>0 a *a*<*b,* definují meze intervalu, ze kterého pocházejí hodnoty beta rozdělení s těmito parametry, z toho plyne, že beta rozdělení je definováno pouze na intervalu $\langle a,b \rangle$.
  - Pokud *a*=0 a *b*=1, dostáváme dvouparametrické beta rozdělení.

Metoda PERT

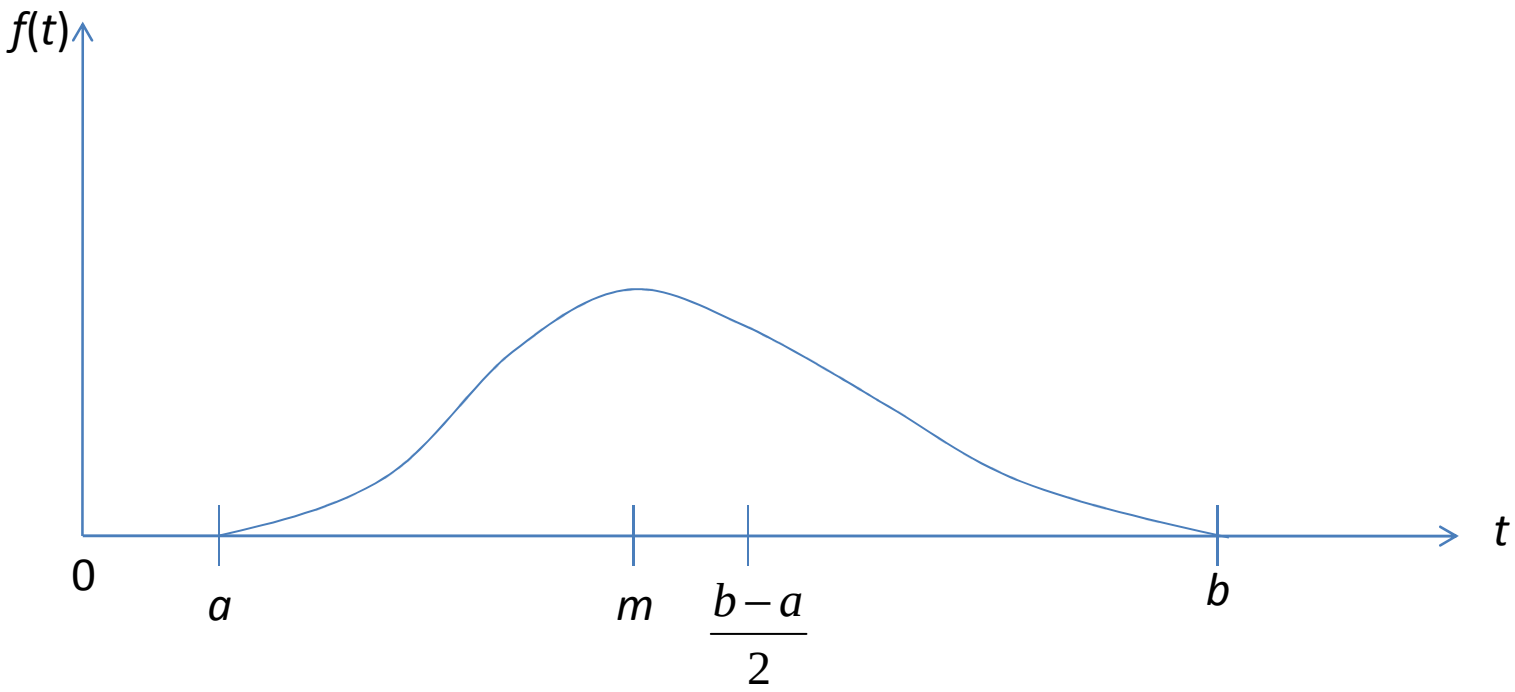
- Beta rozdělení můžeme popsat hustotou pravděpodobnosti ve tvaru:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{(t-a)^{\alpha-1}\cdot(b-t)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)\cdot(b-a)^{\alpha+\beta-1}} & \text{pro } a<t<b,\\ 0 & \text{jinde}.\end{cases}$$

- V závislosti na parametrech tvaru může být rozdělení symetrické nebo nesymetrické.

Metoda PERT

- Ukázkový průběh hustoty pravděpodobnosti je uveden na obrázku.



Metoda PERT

- Při praktických výpočtech ovšem pracujeme pouze se střední hodnotou trvání činnosti [*i*,*j*] EX_{ij} a s rozptylem trvání činnosti [*i*,*j*] DX_{ij}.
- Tyto hodnoty potřebné pro výpočet stanovíme na základě tří odhadů trvání činnosti [*i*,*j*]:
  - a_{ij} – optimistický odhad trvání činnosti [*i*,*j*], který představuje nejkratší čas, ve kterém je možno činnost realizovat.

Metoda PERT

- b_{ij} – pesimistický odhad trvání činnosti [*i*,*j*], který představuje nejdelší uvažovanou dobu trvání, ve které je možno danou činnost realizovat.
- m_{ij} – normální odhad trvání činnosti [*i*,*j*], který představuje nejpravděpodobnější délku trvání dané činnosti, jedná se tedy o modus rozdělení.

- Na základě těchto tří odhadů stanovíme střední dobu trvání a rozptyl trvání každé činnosti.

Metoda PERT

- Pro výpočet EX_{ij} a DX_{ij} se používají vztahy:

$$EX_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6},$$

$$DX_{ij} = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{36}.$$

- Známe-li pro každou činnost tyto hodnoty, můžeme přistoupit k vlastnímu výpočtu metody PERT podle následujícího postupu.

Metoda PERT

1) V síťovém grafu nalezneme stejným způsobem jako u metody CPM kritickou cestu, přičemž při výpočtu pracujeme se středním trváním činností EX_{ij}.
2) Vypočítaná doba trvání projektu T_e odpovídá času, ve kterém by měl být projekt dokončen s pravděpodobností 0,5. Zároveň pravděpodobnost, že doba trvání projektu bude vyšší než T_e, je rovna 0,5.

Metoda PERT

3) V tomto kroku počítáme pro **všechny vrcholy *i* ležící na kritické cestě** rozptyl nejdříve možného počátku vrcholu DX_{ZM_i} a rozptyl nejpozději přípustného konce vrcholu DX_{KP_i}. Výpočet probíhá ve dvou fázích:
   - V první fázi postupujeme od počátečního vrcholu ke koncovému, přičemž pro počáteční vrchol platí, že $DX_{ZM_1} = 0$.

Metoda PERT

Pro rozptyly nejdříve možných počátků ostatních vrcholů *j* na kritické cestě platí:

$$DX_{ZM_j} = DX_{ZM_i} + DX_{ij} \, .$$

Označme rozptyl nejdříve možného počátku koncového vrcholu $DX_{ZM_n} = DX_{T_e}$, což je rozptyl doby trvání celého projektu.

– V druhé fázi postupujeme zpětně od koncového vrcholu po kritické cestě k počátečnímu vrcholu.

Metoda PERT

V této fázi počítáme rozptyly nejpozději přípustných konců vrcholů *i* ležících na kritické cestě podle vztahu:

$$DX_{KP_i} = DX_{KP_j} + DX_{ij} \text{ ,}$$

přičemž pro koncový vrchol platí, že $DX_{KP_n} = 0$.

Metoda PERT

- Jelikož je doba trvání jednotlivých činností náhodná proměnná, je tedy náhodnou proměnnou i celková doba trvání projektu, o které budeme předpokládat, že se řídí normálním rozdělením (čím větší počet bude kritických činností, tím přesnější bude tento předpoklad).

Metoda PERT

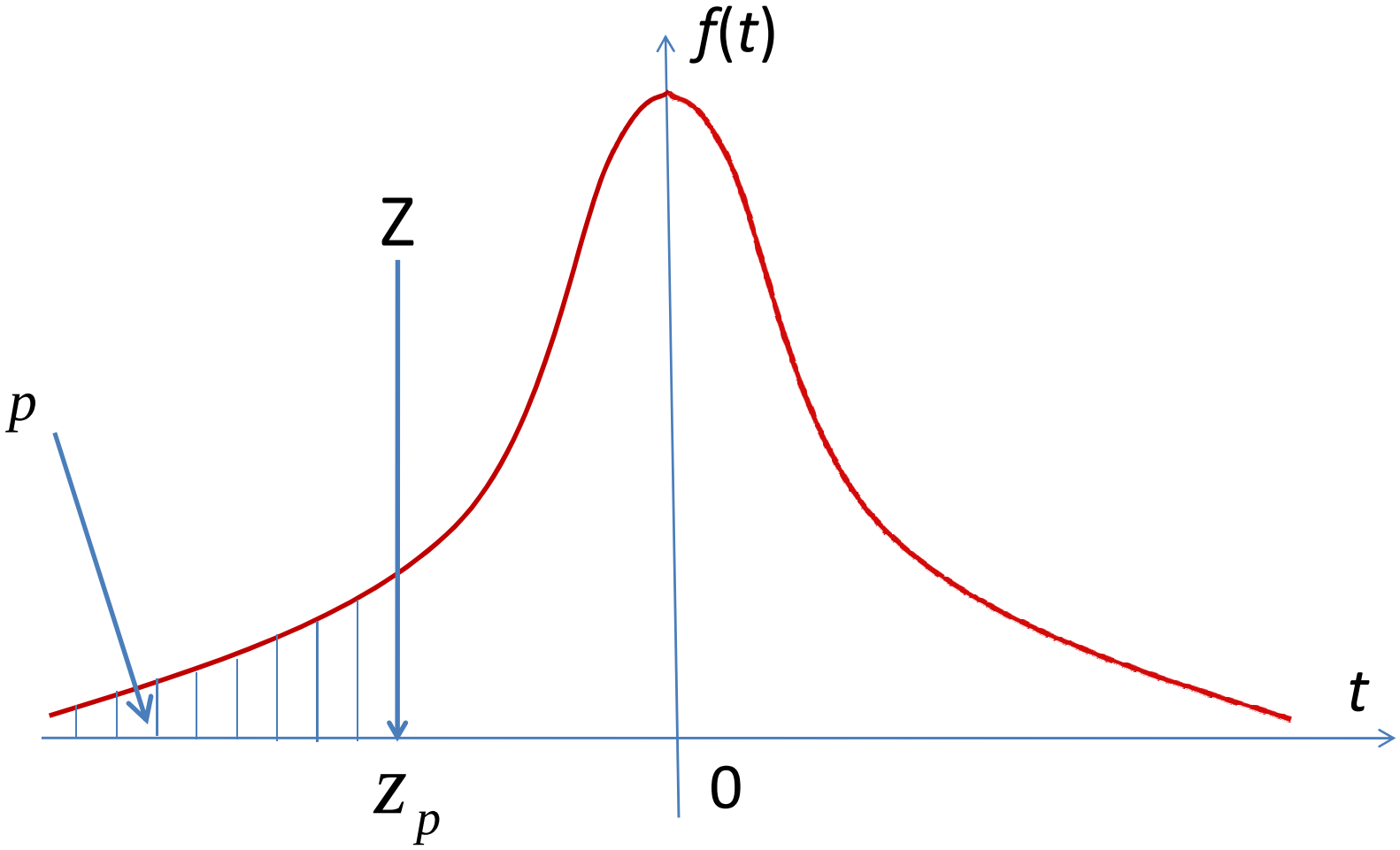
- Celková doba trvání projektu se tedy řídí normálním rozdělením se střední hodnotou T_e a rozptylem DX_{T_e} .
- Nyní nás může zajímat odpověď na otázku, jaká je pravděpodobnost P(t<T_p), že skutečná doba trvání projektu t nepřesáhne zvolenou dobu trvání projektu T_p (jinými slovy bude dodržen zvolený termín).

Metoda PERT

- Nebo nás může zajímat, jaká musí být doba trvání projektu T_p, aby pravděpodobnost $P(t<T_p)$ dodržení tohoto termínu byla rovna určité hodnotě.
- Je zřejmé, že za předpokladu normality trvání celého projektu musí platit (standardizace normálního rozdělení):

$$Z = \frac{T_p - T_e}{\sqrt{DX_{T_e}}} \rightarrow N(0,1).$$

Metoda PERT

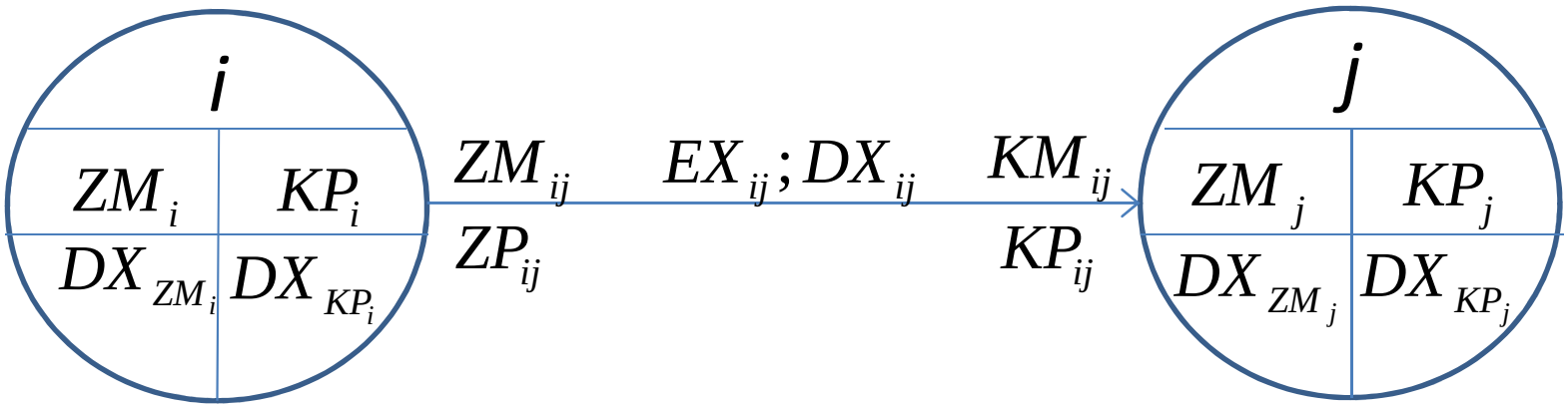


Metoda PERT

- V prvním případě dosazením známých hodnot dostaneme hodnotu 100p%-ního kvantilu z_p a musíme nalézt odpovídající pravděpodobnost p.
- V druhém případě známe hodnotu pravděpodobnosti p, na základě které jsme schopni stanovit hodnotu příslušného kvantilu z_p, tudíž jsme pak schopni stanovit dobu trvání projektu T_p.

Metoda PERT

- Při grafickém řešení metody PERT musíme v síťovém grafu zaznamenávat i jednotlivé rozptyly, viz obrázek.



Metoda PERT

- **Př.:** Nalezněte v daném síťovém grafu kritickou cestu, stanovte střední dobu trvání projektu a její rozptyl a dále stanovte pravděpodobnost, že projekt bude trvat o 1 týden méně než je jeho střední doba trvání, a takovou dobu trvání projektu, během níž je projekt možno realizovat s pravděpodobností 0,9. Všechny doby trvání jsou uvedeny v týdnech.

Metoda PERT

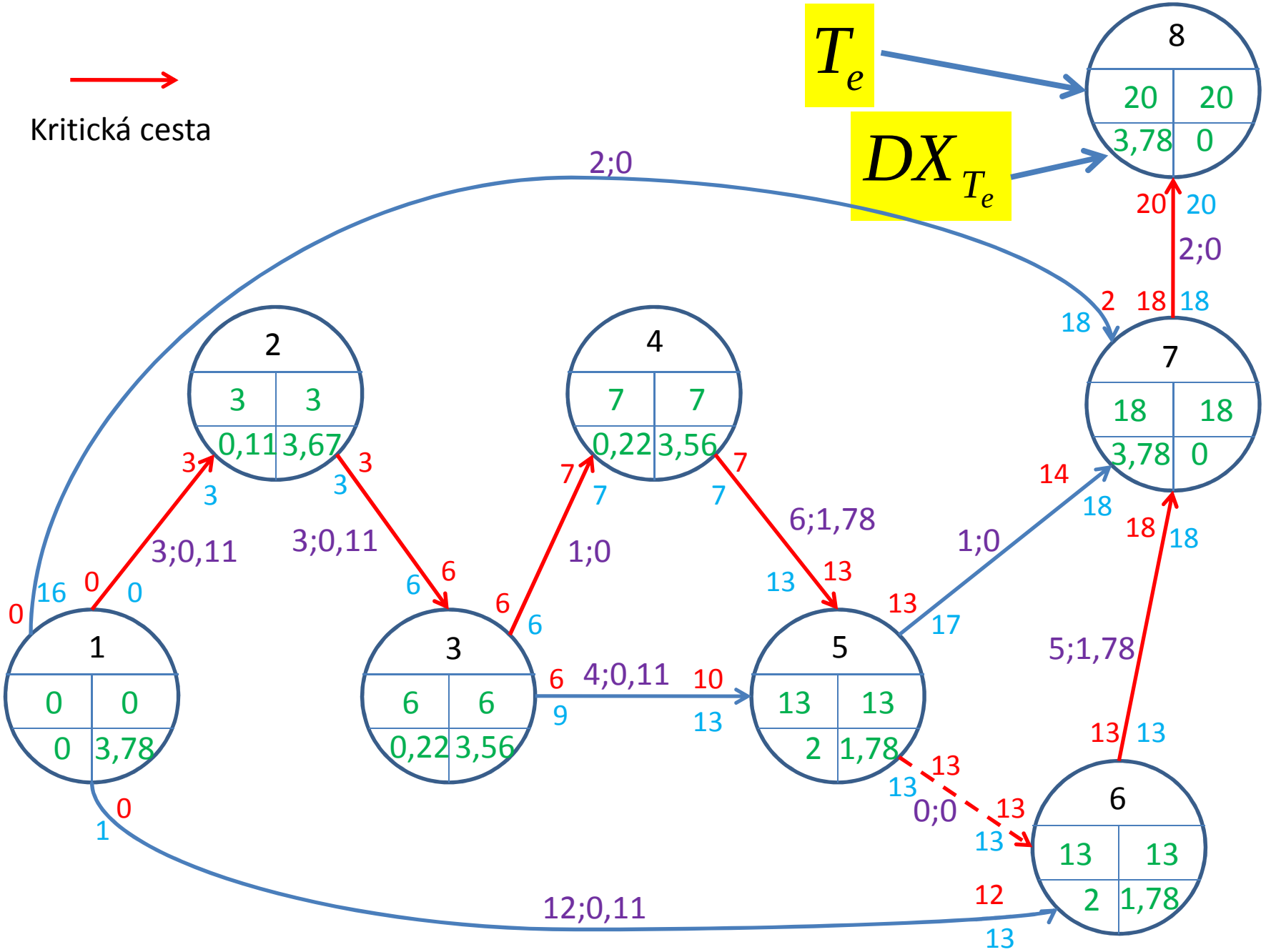
Činnost	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	EX_{ij}	DX_{ij}
12	2	3	4	3	0,11
16	11	12	13	12	0,11
17	2	2	2	2	0
23	2	3	4	3	0,11
34	1	1	1	1	0
35	3	4	5	4	0,11
45	4	5	12	6	1,78
56	0	0	0	0	0
57	1	1	1	1	0
67	3	4	11	5	1,78
78	2	2	2	2	0

$$EX_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6},$$

$$DX_{ij} = \frac{(b_{ij} - a_{ij})^2}{36}.$$

Metoda PERT

- Na základě optimistického, normálního a pesimistického odhadu dob trvání jednotlivých činností projektu jsme spočítali střední dobu trvání jednotlivých činností a jejich rozptyly. Nyní přistoupíme k výpočtu kritické cesty, délky jejího trvání a rozptylu jejího trvání.


Kritická cesta
T_e
DX_{T_e}
1
0 0
0 3,78
2
3 3
0,11 3,67
3
6 6
0,22 3,56
4
7 7
0,22 3,56
5
13 13
2 1,78
6
13 13
2 1,78
7
18 18
3,78 0
8
20 20
3,78 0
2;0
3;0,11
3;0,11
1;0
6;1,78
1;0
4;0,11
0;0
5;1,78
2;0
12;0,11

Metoda PERT

- Výpočtem jsme zjistili, že střední délka trvání projektu činí 20 týdnů s rozptylem 3,78 týdnů^2.
- Nyní máme za úkol stanovit pravděpodobnost, že projekt bude realizován za 19 týdnů. Víme, že T_e=20 týdnů, T_p=19 týdnů a $DX_{T_e} = 3{,}78$ týdnů^2.

Metoda PERT

- Dosazením do vztahu získáme:

$$Z = \frac{T_p - T_e}{\sqrt{DX_{T_e}}} = \frac{19 - 20}{\sqrt{3{,}78}} \doteq -0{,}51.$$

- Na základě obrázku vidíme, že jsme získali hodnotu 100*p*%-ního kvantilu, nyní musíme na základě toho, že se jedná o kvantil normovaného normálního rozdělení, nalézt příslušnou pravděpodobnost, hledáme tedy hodnotu distribuční funkce normovaného rozdělení v bodě z_p. K tomu lze např. využít tabulky nebo Excel.

Metoda PERT

- V software Excel získáme příslušnou pravděpodobnost pomocí funkce NORMSDIST:

$$P(t < T_p) = \phi(z_p) = NORMSDIST(-0{,}51) \doteq 0{,}305.$$

- Pravděpodobnost, že bude projekt ukončen do 19 týdnů od jeho zahájení, je rovna 0,305.

---

pozn. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení se označuje symbolem ϕ .

Metoda PERT

- Dále máme odpovědět na otázku, do kolika týdnů jsme schopni realizovat projekt s pravděpodobností 0,9.
- Nyní řešíme opačný problém, známe hodnotu distribuční funkce, pro kterou potřebujeme nalézt hodnotu příslušného kvantilu a na základě jeho znalosti spočítat příslušnou dobu trvání projektu T_p.

Metoda PERT

- Víme, že P(t<T_p)=0,9, T_e=20 týdnů a $DX_{T_e} = 3{,}78$ týdnů^2. Můžeme tedy psát:

  $$\phi(z_p) = 0{,}9 \Rightarrow z_p = 1{,}28.$$

- K tomuto lze dojít buď pomocí tabulek a nebo s využitím funkce Excelu NORMSINV(0,9).
- Nyní již můžeme dosadit:

  $$1{,}28 = \frac{T_p - 20}{\sqrt{3{,}78}} \Rightarrow T_p \doteq 22{,}5$$ týdnů.

Metoda PERT

- Vidíme tedy, že za 22,5 týdnů bychom měli projekt ukončit s pravděpodobností 0,9.