2 ELEMENTÁRNÍ POČET PRAVDĚPODOBNOSTI

Čas ke studiu kapitoly: 70 minut

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- charakterizovat teorii pravděpodobnosti a matematickou statistiku
- vysvětlit základní pojmy teorie pravděpodobnosti
- popsat typy náhodných jevů
- vysvětlit a umět používat základní relace mezi jevy
- vysvětlit pojem pravděpodobnosti
- definovat pravděpodobnost pomocí axiomů
- vlastnosti pravděpodobnostní funkce
- pracovat s podmíněnou pravděpodobností
- vysvětlit větu o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu

2.1 Základní pojmy

Čas ke studiu odstavce: 20 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- charakterizovat teorii pravděpodobnosti a matematickou statistiku
- vysvětlit základní pojmy teorie pravděpodobnosti

Výklad:

2.1.1 Čím se zabývají teorie pravděpodobnosti a matematická statistika ?

Okolo nás existuje spousta věcí, jevů a událostí, které nelze předvídat - jsou důsledkem náhody. Otázkami náhody a náhodných dějů se zabývají dvě matematické disciplíny: teorie pravděpodobnosti a matematická statistika.

Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína, jejíž logická struktura je budována axiomaticky. To znamená, že její základ tvoří několik tvrzení (tak zvaných axiomů), která vyjadřují základní vlastnosti axiomatizované veličiny a všechna další tvrzení jsou z nich odvozena deduktivně. Systém axiomů vzniká abstrakcí z pozorovaných skutečností reálného světa. Axiomy se nedokazují, považují se za prověřené dlouhou lidskou zkušeností.

Matematická statistika je naproti tomu věda, která zahrnuje studium dat vykazujících náhodná kolísání, ať už jde o data získaná pečlivě připraveným pokusem provedeným pod stálou kontrolou experimentálních podmínek v laboratoři, či o data provozní. Statistika jako věda se dále zabývá otázkami získávání dat, jejich analýzou a úlohou při formulování závěrů o pokusech a experimentech, nebo při rozhodování založeném na datech.

2.1.2 Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

Náhodný pokus je každý konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá, a který je, alespoň teoreticky, neomezeně opakovatelný.

Náhodný jev je jakékoliv tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze po skončení pokusu říci, zda je pravdivé nebo ne. U termínu náhodný jev budeme v dalším textu většinou slovo náhodný vynechávat a budeme mluvit pouze o jevu. Jevy značíme většinou velkými písmeny latinské abecedy (A,B,X,Y,Z,…).

Pro přesný matematický popis pokusu je nutno stanovit **množinu všech možných výsledků** daného pokusu. Tyto možné výsledky musí být zavedeny tak, aby byly vzájemně **neslučitelné**, tj. aby žádné dva z nich nemohly nastat současně. Dále musí být množina možných výsledků **vyčerpávající**, to znamená, že při realizaci daného pokusu musí právě jeden z nich vždy nastat. Před ukončením pokusu ovšem nevíme, který to bude.

Tyto možné výsledky náhodného pokusu nazýváme **elementárními jevy**. Elementární jevy mohou být nejrůznější povahy podle povahy pokusu.

Příklad množin všech možných výsledků

{rub, líc} – při hodu mincí

{1,2,3,4,5,6} – při hodu kostkou

Označíme **Ω** množinu všech takovýchto výsledků. Tuto množinu nazýváme **základní prostor** (elementárních jevů). Z matematického hlediska je tedy Ω libovolná množina, která může být buď konečná nebo nekonečná. Má smysl uvažovat pouze množiny neprázdné.

Elementární jev {ω} je podmnožinou množiny Ω, obsahující jeden prvek ω množiny Ω, zapisujeme $\{\omega\} \subset \Omega$.

Za **jev A** budeme považovat libovolnou podmnožinu A množiny Ω, zapisujeme $A \subset \Omega$.

Výsledek náhodného pokusu nelze s jistotou předpovědět. Některé výsledky však nastávají častěji, některé méně často, některé velmi zřídka. Při velkých sériích opakování však i tyto náhodné pokusy (resp. jejich výsledky) vykazují určité zákonitosti a pravidelnosti.

Cílem teorie pravděpodobnosti je právě studium těchto zákonitostí, jejich popsání a vytvoření pravidel pro určení měr početnosti výskytů těchto jevů.

S těmito zákonitostmi se běžně setkáváme, aniž bychom si to mnohdy uvědomovali. Např. každý ví či intuitivně tuší, že při hodu mincí má stejnou šanci rub i líc a že tudíž při velkém počtu pokusů budou nejspíš padat stejně často. Ze statistických ročenek lze snadno zjistit, že podíl chlapců narozených v jednotlivých letech vzhledem k celkovému počtu narozených dětí se pohybuje okolo 51,5%. Přestože v jednotlivých případech nelze pohlaví dítěte předpovědět, můžeme poměrně přesně odhadnout, kolik se narodí chlapců z celkového počtu 10 000 narozených dětí.

Z těchto příkladů vyplývá, že relativní četnosti některých jevů se s rostoucím počtem opakování ustálí na určitých číslech. Tento úkaz budeme nazývat **stabilitou relativních četností**. Tato stabilita relativních četností je empirickým základem teorie pravděpodobnosti.

Relativní četností přitom rozumíme podíl $n(A)/n$, kde n je celkový počet provedených pokusů a n(A) je počet těch realizací pokusu, ve kterých jev A nastal.

Shrnutí:

Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína, jejíž logická struktura je budována axiomaticky. Axiom je tvrzení prověřené dlouhou lidskou zkušeností.

Matematická statistika je věda, která se zabývá otázkami získávání dat, jejich analýzou a úlohou při formování závěrů o pokusech a experimentech, nebo při rozhodování založeném na datech.

Náhodný pokus je každý konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

Základní prostor Ω (elementárních jevů) je množinou všech možných výsledků pokusu.

Relativní četnosti některých jevů s rostoucím počtem opakování vykazují jistou **stabilitu**.

2.2 Operace s náhodnými jevy

Čas ke studiu odstavce: 20 minut

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat typy náhodných jevů
- vysvětlit a umět používat základní relace mezi jevy

Výklad:

2.2.1 Jaké jsou typy náhodných jevů ?

Budeme říkat, že při realizaci náhodného pokusu **nastal jev A** , jestliže nastal elementární jev $\{\omega\} \subset \Omega$, takový, že $\{\omega\} \subset A$. Výsledek $\{\omega\} \subset A$nazýváme také **výsledek příznivý jevu A**.

Speciálně může dojít k těmto náhodným jevům:

Jev jistý
nastane nutně při každé realizaci náhodného pokusu. Je roven množině Ω.

Např. při házení kostkou jev: padne jedno z čísel 1,2,3,4,5,6 (samozřejmě pokud házíme běžnou hrací kostkou s obvyklým značením stran).

Jev nemožný
nemůže v daném pokusu nikdy nastat. Budeme jej značit $\emptyset$.

Např. při házení kostkou jev: padne číslo osm.

2.2.2 Jaké jsou relace mezi jevy ?

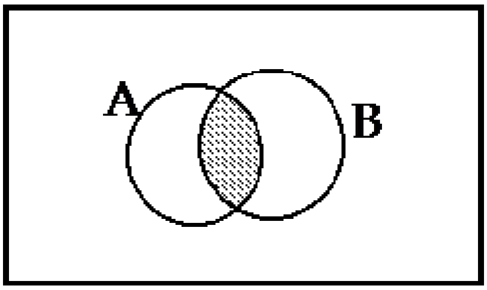
Vzhledem k tomu, že jev je tedy jen jiné označení pro podmnožinu množiny Ω, můžeme zavést relace mezi jevy, které odpovídají množinovým relacím. Pro jevy budou také platit všechna tvrzení, která platí pro množiny.

- **Průnik jevů A, B,** značíme **A ∩ B**

je jev, který nastane, když nastanou jevy A,B současně. (čteme A průnik B nebo A a B - nastává totiž jak jev A tak i jev B současně)

Grafický příklad:
Nechť pokus spočívá v tom, že uvnitř daného obdélníka vybíráme bod. Množinu elementárních jevů, které mohou nastat při tomto pokusu můžeme tedy graficky zobrazit na množinu bodů, ležících uvnitř uvažovaného obdélníka. Nechť jev A spočívá v tom, že takto vybraný bod leží uvnitř levé kružnice a jev B spočívá v tom, že vybraný bod leží uvnitř pravé kružnice. Pak následující diagram znázorňuje průnik jevů A a B:

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in \mathrm{B}\}$$



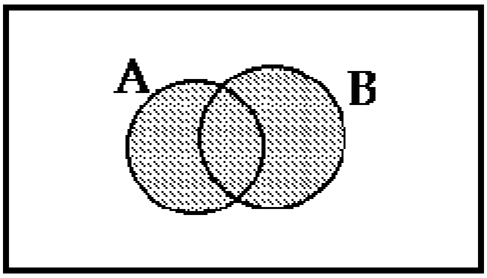
Příklad - házení kostkou: jev A nechť značí - padne číslo 2 nebo 3 nebo 4, a jev B - padne sudé číslo. Je zřejmé, že A ∩ B ={2,4}.

- **Sjednocení jevů A,B,** značíme **A ∪ B**

O sjednocení jevů A a B hovoříme tehdy, jestliže nastává jev A nebo jev B. Slůvko "nebo" znamená, že může nastat pouze jeden z těchto jevů, ale mohou nastat i oba jevy zároveň. Jinými slovy, nastane alespoň jeden z těchto jevů.

Grafický příklad:

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$$



Příklad - házení kostkou: nechť jev A={1,3,4}, nechť dále jev B je skutečnost, že padne sudé číslo. Je zřejmé, že A ∪ B ={1,2,3,4,6}.

- **Disjunktní jevy A, B,** značíme **A ∩ B = ∅**

Dva jevy A,B nemohou nastat současně, nemají-li spolu žádný možný společný výsledek. Takovéto jevy budeme nazývat jevy disjunktní (někdy též **neslučitelné**).

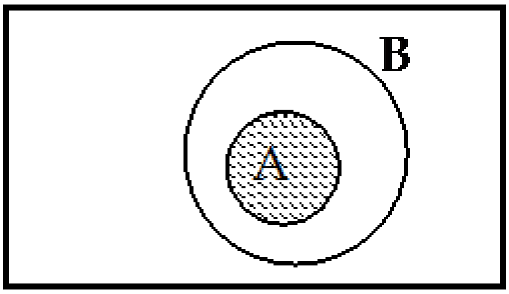
Příklad - házení kostkou: Definujme jev A - padne sudé číslo, a jev B - padne liché číslo. Tyto jevy nemají žádný možný společný výsledek. Jestliže nastane jev A, nemůže zároveň nastat i jev B a naopak.

- **Jev A je podjevem jevu B,** značíme **A ⊂ B**

Znamená to, že jev A má za následek jev B (tj. nastane-li jev A, nastane taktéž jev B) .

Grafický příklad:

$$A \subset B \Leftrightarrow \{\omega \in A \Rightarrow \omega \in B\}$$



Příklad - házení kostkou: Nechť jev A - padne číslo 2, jev B - padne sudé číslo. Jev A je pak podjevem jevu B.

- **Jevy A,B jsou ekvivalentní,** značíme **A = B**

je-li A ⊂ B a současně B ⊂ A.

Příklad - házení kostkou: Jev A - při hodu kostkou padne sudé číslo, jev B - při hodu kostkou padne číslo dělitelné dvěma.

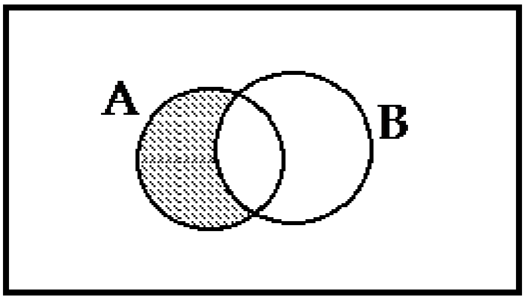
- **Rozdíl jevů A, B,** značíme **A-B**

Rozdílem jevů A a B budeme chápat jev, který nastává právě tehdy, nastane-li jev A a současně nenastane jev B.

Grafický příklad:

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$$



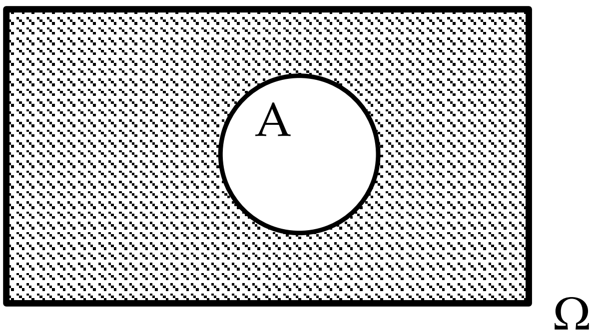
Příklad - házení kostkou: Jev A - padne číslo větší než dvě, jev B - padne sudé číslo. Rozdíl jevů A a B je pak jev A – B ={3,5}

- **Doplněk jevu A, opačný jev,** značíme $\overline{A}$

Opačným jevem (doplňkovým) k jevu A budeme rozumět jev $\overline{A}$, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A.

Grafický příklad:

$$\overline{A} = \{\omega | \omega \notin A\}$$



Příklad - házení kostkou: Jev A - padne sudé číslo, pak jev $\overline{A}$ - padne liché číslo.

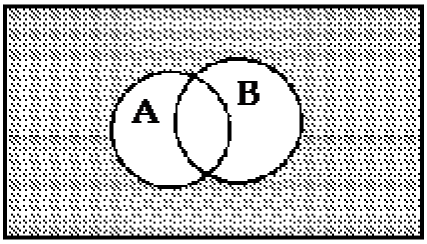
Pro operace s jevy, jak již bylo řečeno, platí algebraické zákony a rovnosti stejné jako pro množiny. To velmi usnadňuje práci s náhodnými jevy.

- **De Morganovy zákony**

jsou logickým důsledkem základních pojmů a základních relací mezi jevy.

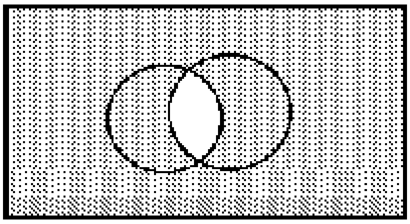
1. **zákon**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



2. **zákon**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

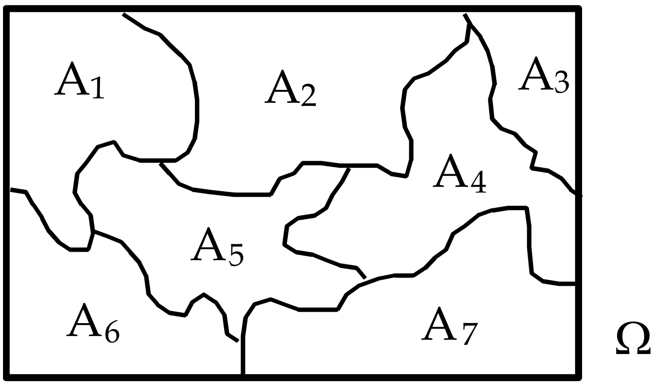


- **Úplná skupina vzájemně disjunktních jevů**

je množina disjunktních jevů $\{A_1, A_2, A_3, \ . \ . \ . \ A_n\}$, jejichž sjednocení tvoří množinu Ω. Zapsáno symbolicky:

$$\Omega' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{, kde } A_i \bigcap A_j = \emptyset \text{, pro } i \neq j$$

Říkáme, že základní prostor je složen z úplné množiny vzájemně disjunktních jevů.



2.3 Teorie pravděpodobnosti

Čas ke studiu odstavce: 30 minut

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vysvětlit pojem pravděpodobnosti
- definovat pravděpodobnost pomocí axiomů
- vlastnosti pravděpodobnostní funkce
- pracovat s podmíněnou pravděpodobností
- vysvětlit větu o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu

Výklad:

2.3.1 Pojem pravděpodobnosti

V souvislosti s náhodnými jevy jsme konstatovali, že za náhodný jev budeme považovat tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze jednoznačně (po uskutečnění pokusu) rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé. V zásadě je třeba rozlišovat mezi **dvěma typy pokusů**: jedním, který je neomezeně mnohokrát opakovatelný za stejných podmínek (takovým může být např. házení mincí či kostkou) a druhým, který nelze za stejných podmínek opakovat (tím může být např. počet narozených dětí v příštím roce). Výsledky těchto dvou možných typů pokusů vedou k definování dvou typů pravděpodobnosti.

Jestliže je pokus opakovatelný neomezeně mnohokrát v čase za stejných podmínek, hovoříme o **objektivní pravděpodobnosti**. Pokud se podmínky mění pokaždé, když je pokus realizován, hovoříme o **subjektivní pravděpodobnosti**.

Objektivní pravděpodobnost je založena na četnosti výskytu sledovaného jevu. Již v předchozí části jsme se zmiňovali o stabilitě relativních četností. Ta hovoří o tom, že relativní četnost jevu A při dostatečném opakování náhodného pokusu se koncentruje kolem určitého čísla. Zdá se tedy rozumné považovat toto číslo za míru četnosti výskytu určitého jevu A a nazvat jej pravděpodobností tohoto jevu.

Subjektivní pravděpodobnost je pravděpodobnost, kterou přiřazujeme výsledku pokusu, jež není za stejných podmínek opakovatelný. Počet narozených dětí v ČR v letošním roce je pokus, který je pozorovatelný pouze jednou, a nemůže mu být tudíž přiřazena objektivní pravděpodobnost. Důležitým rysem subjektivní pravděpodobnosti je fakt, že její hodnota je většinou velmi důležitá pro účely rozhodování a řešení závažných problémů.

Pro oba typy pravděpodobností platí stejné zákony a pravidla, jimiž se nyní budeme zabývat.

2.3.2 Klasická definice pravděpodobnosti

Tato definice se zakládá na objektivní pravděpodobnosti a říká, že:

Pravděpodobnost jevu A je limitním případem relativní četnosti jevu A.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n},$$

kde: n(A) … počet výsledků příznivých jevu A (kolikrát jev A nastal)

n … počet všech realizací pokusu

Klasická definice pravděpodobnosti se užívá v případech, že je:

- základní prostor tvořen konečným počtem elementárních jevů
- míra výskytu všech elementárních jevů stejná

Uveďme si nyní axiomatickou definici pravděpodobnosti.

2.3.3 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Pravděpodobnostním prostorem nazveme trojici (Ω, *S*, P) kde

(i) **Ω** je množina všech různých, vzájemně se vylučujících výsledků náhodného pokusu (prvky **Ω** jsou elementární jevy, **Ω** tvoří základní prostor)

(ii) ***S*** je taková množina podmnožin **Ω**, že platí:
a) $\Omega \in S$;
b) je-li $A \in S$, potom $\overline{A} = (\Omega - A) \in S$;
c) Jestliže $A_1, A_2, A_3, \ldots \in S$, potom $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

Prvky množiny *S* označujeme jako **jevy.**

(iii) **P** je funkce zobrazující *S* na $< 0,1 >$ taková, že platí:
a) $P(\Omega) = 1$;
b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ pro každé $A \in S$;
c) Pro navzájem disjunktní jevy $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ z množiny *S* platí:

$$P\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\}$$

Funkce P se nazývá **pravděpodobnostní míra** nebo krátce **pravděpodobnost**.

Poznámky k axiomatické definici:

1. Jestliže nějaký systém podmnožin splňuje podmínky (ii) a – c axiomatické definice, nazýváme ho **σ-algebrou**.
2. Volba *S* závisí na konkrétní situaci. Obecně za něj nemusíme brát systém všech podmnožin Ω, ale obvykle stačí jeho určitý podsystém.
3. Každá reálná funkce na *S*, která splňuje vlastnosti (iii) a-c, je **pravděpodobnostní mírou**. Dané realitě ale odpovídá obvykle pouze jedna z nich. Například u hodu pravidelnou kostkou to bude pravděpodobnostní míra daná rovnostmi P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6. Ostatní pravděpodobnostní míry odpovídají různým nepravidelným kostkám.

Příklad - hod kostkou:
Určete pravděpodobnost, že padne sudé číslo.

Základní prostor Ω: Ω = {1,2,3,4,5,6,},
Jev A – padne sudé číslo: A = {2,4,6,},

S je množina všech podmnožin množiny Ω (někdy značíme *S* = exp Ω) a pravděpodobnost definujeme vztahem **P{A}**=$\frac{\text{card}A}{6}$, kde card A je počet prvků množiny A. Tedy: **P{A}**= $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Snadno můžeme ověřit, že tento model odpovídá současně klasické i axiomatické definici pravděpodobnosti.

2.3.4 Vlastnosti pravděpodobnosti

Bezprostředně z axiomatické definice pravděpodobnosti vyplývají další vlastnosti.

1. $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$
2. $B \subset A \quad \Rightarrow \quad P\{B\} \leq P\{A\}$
3. $P\{\overline{A}\} = 1 - P\{A\}$
4. $P\{\emptyset\} = 0$
5. $P\{B - A\} = P\{B\} - P\{B \cap A\}$
   - Speciálně: $A \subset B \quad \Rightarrow \quad P\{B - A\} = P\{B\} - P\{A\}$
6. $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$

Všechny tyto vlastnosti se dají snadno dokázat přímo z axiomatické definice pravděpodobnosti.
Přímým důsledkem de Morganových zákonů je následující vlastnost:

7. $P\{A \cup B\} = 1 - P\{\overline{A \cup B}\} = 1 - P\{\overline{A} \cap \overline{B}\}$

Řešený příklad:

Pravděpodobnost, že selže hasící systém továrny je 20%, pravděpodobnost, že selže poplachové zařízení je 10% a pravděpodobnost, že selžou jak hasící systém, tak i poplachové zařízení jsou 4%. Jaká je pravděpodobnost,že:

a) alespoň jeden systém bude fungovat?
b) budou fungovat oba dva systémy?

Řešení:

Označme si možné jevy takto: H ... hasící systém funguje
S ... poplachové zařízení (siréna) funguje

Víme, že:

$$P(\overline{H}) = 0{,}20$$
$$P(\overline{S}) = 0{,}10$$
$$P(\overline{H} \cap \overline{S}) = 0{,}04$$

Máme zjistit:

ada) $P(H \cup S)$

K řešení této otázky můžeme přistupovat dvojím způsobem:

Podle definice: Nejde o jevy neslučitelné (mohou nastat zároveň), proto:

$$P(H \cup S) = P(H) + P(S) - P(H \cap S),$$

kde by mohlo být problémem určit $P(H \cap S)$

nebo

Přes jev opačný: Kdy na základě de Morganových zákonů můžeme psát, že:

$$P(H \cup S) = 1 - P(\overline{H \cup S}) = 1 - P(\overline{H} \cap \overline{S}),$$

což můžeme vyčíslit přímo.

$$\underline{\underline{P(H \cup S)}} = 1 - 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}96}}$$

Pravděpodobnost, že bude fungovat alespoň jeden z ochranných systémů je 96%.

adb) $P(H \cap S)$

Což nemůžeme řešit **prostřednictvím definičního vztahu:**

$$\left(P(H \cap S) = P(H|S) \cdot P(S) = P(S|H) \cdot P(H)\right),$$

neboť nemáme informace o závislosti poruch jednotlivých ochranných systémů. Proto zkusíme znovu postupovat **přes jev opačný**:

$$P(H \cap S) = 1 - P(\overline{\overline{H} \cap \overline{S}}) = 1 - P(\overline{H} \cup \overline{S}) = 1 - \left[P(\overline{H}) + P(\overline{S}) - P(\overline{H} \cap \overline{S})\right],$$

což můžeme přímo vyčíslit:

$$\underline{\underline{P(H \cap S)}} = 1 - \left[P(\overline{H}) + P(\overline{S}) - P(\overline{H} \cap \overline{S})\right] = 1 - [0{,}20 + 0{,}10 - 0{,}04] = \underline{\underline{0{,}74}}$$

Pravděpodobnost, že oba dva ochranné systémy budou fungovat je 74%.

Řešený příklad:

120 studentů absolvovalo zkoušky z matematiky a z fyziky. 30 z nich nesložilo obě zkoušky, 8 nesložilo pouze zkoušku z matematiky a 5 nesložilo pouze zkoušku z fyziky. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student:

a) složil zkoušku z matematiky, víme-li že nesložil zkoušku z fyziky
b) složil zkoušku z fyziky, víme-li že nesložil zkoušku z matematiky
c) složil zkoušku z matematiky, víme-li že složil zkoušku z fyziky

Řešení:

Označme si možné jevy takto:	M	...	složil zkoušku z matematiky
	F	...	složil zkoušku z fyziky

Víme, že:

$$P(\overline{M} \cap \overline{F}) = \frac{30}{120}$$

$$P(\overline{M} \cap F) = \frac{8}{120}$$

$$P(M \cap \overline{F}) = \frac{5}{120}$$

Máme zjistit:

ada) $P(M|\overline{F})$

což určíme jednoduše podle definice podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(M|\overline{F}) = \frac{P(M \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(M \cap \overline{F})}{P(M \cap \overline{F}) + P(\overline{M} \cap \overline{F})},$$

kde pravděpodobnost, že student nesložil zkoušku z fyziky určujeme podle věty o úplné pravděpodobnosti jako součet pravděpodobnosti, že student nesložil pouze zkoušku z fyziky a pravděpodobnosti, že student nesložil obě zkoušky.
Po vyčíslení tedy víme, že:

$$\underline{\underline{P(M|\overline{F})}}=\frac{P(M\cap\overline{F})}{P(M\cap\overline{F})+P(\overline{M}\cap\overline{F})}=\frac{\frac{5}{120}}{\frac{5}{120}+\frac{30}{120}}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}\cong\underline{\underline{0{,}14}}$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z matematiky, víme-li že nesložil zkoušku z fyziky je asi 14%.

adb) $P(F|\overline{M})$

což určíme obdobně jako při řešení předcházející úlohy:

$$P(F|\overline{M})=\frac{P(F\cap\overline{M})}{P(\overline{M})}=\frac{P(F\cap\overline{M})}{P(F\cap\overline{M})+P(\overline{F}\cap\overline{M})},$$

Po vyčíslení tedy víme, že:

$$\underline{\underline{P(F|\overline{M})}}=\frac{P(F\cap\overline{M})}{P(F\cap\overline{M})+P(\overline{F}\cap\overline{M})}=\frac{\frac{8}{120}}{\frac{8}{120}+\frac{30}{120}}=\frac{8}{38}=\frac{4}{19}\cong\underline{\underline{0{,}21}}$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z fyziky, víme-li že nesložil zkoušku z matematiky je asi 21%.

adc) $P(M|F)$

opět si napíšeme definiční vztah:

$$P(M|F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)},$$

k němuž můžeme přistoupit dvojím způsobem:

Buď se pokusíme tento **vztah upravit** na základě známých vztahů tak, abychom jej mohli prostřednictvím zadaných parametrů vyčíslit:

$$\underline{\underline{P(M|F)}}=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{1-P(\overline{M\cap F})}{1-P(\overline{F})}=\frac{1-P(\overline{M}\cup\overline{F})}{1-\left[P(\overline{F}\cap M)+P(\overline{F}\cap\overline{M})\right]}=\frac{1-\left[P(\overline{F})+P(\overline{M})-P(\overline{F}\cap\overline{M})\right]}{1-\left[P(\overline{F}\cap M)+P(\overline{F}\cap\overline{M})\right]}=$$

$$=\frac{1-\left[\left[P(\overline{F}\cap M)+P(\overline{F}\cap\overline{M})\right]+\left[P(F\cap\overline{M})+P(\overline{F}\cap\overline{M})\right]-P(\overline{F}\cap\overline{M})\right]}{1-\left[P(\overline{F}\cap M)+P(\overline{F}\cap\overline{M})\right]}=$$

$$=\frac{1-\left[P(\overline{F}\cap M)+P(F\cap\overline{M})+P(\overline{F}\cap\overline{M})\right]}{1-\left[P(\overline{F}\cap M)+P(\overline{F}\cap\overline{M})\right]}=\frac{1-\left[\frac{5}{120}+\frac{8}{120}+\frac{30}{120}\right]}{1-\left[\frac{5}{120}+\frac{30}{120}\right]}=\frac{\frac{77}{120}}{\frac{85}{120}}=\frac{77}{85}\cong\underline{\underline{0{,}91}}$$

nebo se pokusíme **potřebné pravděpodobnosti vyčíst ze zadání**:

Zadané údaje si zapíšeme do tabulky:

	Složili zkoušku z matematiky	**Nesložili zkoušku z matematiky**	**Celkem**
Složili zkoušku z fyziky		8	
Nesložili zkoušku z fyziky	5	30	35
Celkem		38	**120**

a zbylé údaje v tabulce jednoduše dopočítáme:

Kolik studentů složilo zkoušku z fyziky? To je celkový počet (120) mínus počet studentů, kteří zkoušku z fyziky nesložili (35), což je 85. Obdobně určíme počet studentů, kteří složili zkoušku z matematiky, což je 120 – 38 = 82. A konečně počet těch, kteří složili obě zkoušky určíme např. jako počet těch, kteří složili zkoušku z matematiky (82) mínus počet těch, kteří složili pouze zkoušku z matematiky (5), což je 77.

	Složili zkoušku z matematiky	**Nesložili zkoušku z matematiky**	**Celkem**
Složili zkoušku z fyziky	77	8	85
Nesložili zkoušku z fyziky	5	30	35
Celkem	82	38	**120**

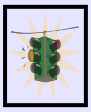
Hledané pravděpodobnosti tedy jsou:

$$P(M \cap F) = \frac{77}{120}; \quad P(F) = \frac{85}{120},$$

z čehož plyne:

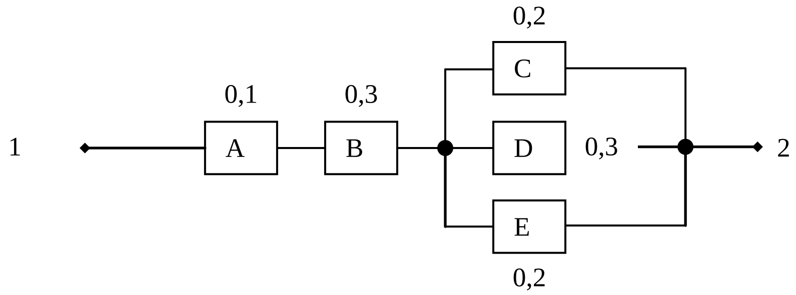
$$\underline{\underline{P(M|F)}} = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{77}{120}}{\frac{85}{120}} = \frac{77}{85} \cong \underline{\underline{0{,}91}}$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z matematiky, víme-li že složil zkoušku z fyziky je asi 91%.
Pozn.: Podle údajů v tabulce bychom mohli řešit i úkoly a) a b).



Řešený příklad:

Spočtěte pravděpodobnost toho, že z bodu 1 do bodu 2 bude protékat elektrický proud, je-li el. obvod včetně pravděpodobnosti poruch jednotlivých součástek vyznačen na následujícím obrázku. (Poruchy jednotlivých součástek jsou na sobě nezávislé.)



Řešení:

Označme si:

A	...	součástka A funguje,	C	...	součástka C funguje,
B	...	součástka B funguje,	D	...	součástka D funguje
			E	...	součástka E funguje,

Pak:

$P(\overline{A}) = 0{,}1 \Rightarrow P(A) = 0{,}9$ $\quad$ $P(\overline{C}) = 0{,}2 \Rightarrow P(C) = 0{,}8$

$P(\overline{B}) = 0{,}3 \Rightarrow P(B) = 0{,}7$ $\quad$ $P(\overline{D}) = 0{,}3 \Rightarrow P(D) = 0{,}7$

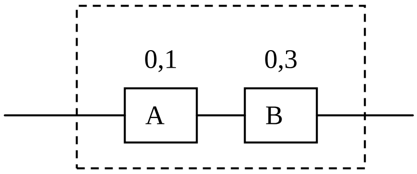
$P(\overline{E}) = 0{,}2 \Rightarrow P(E) = 0{,}8$

Pro zjednodušení si obvod představíme jako sériové zapojení dvou bloků. Blok 1 je tvořen sériovým zapojením součástek A a B, Blok 2 je tvořen paralelním zapojením součástek C, D a E. V první fázi si určíme pravděpodobnosti poruch jednotlivých bloků:

Blok 1:

B1 ... Blok 1 funguje

Máme-li **sériově zapojené součástky**, je vhodné určovat přímo pravděpododobnost, že systém (blok) funguje.



Blok 1

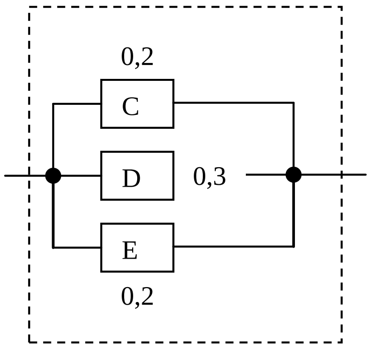
Blok 1 funguje právě tehdy, jsou-li funkční součástky A i B.
Vzhledem k nezávislosti poruch jednotlivých součástek můžeme říci, že:

$$P(B1) = P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}9.0{,}7 = 0{,}63$$

Blok 2:

B2 … Blok 2 funguje

Máme-li **paralelně zapojené součástky**, je vhodné pravděpodobnost toho, že systém (blok) funguje určovat jako doplněk pravděpodobnosti jevu opačného – tj. toho, že systém (blok) nefunguje.

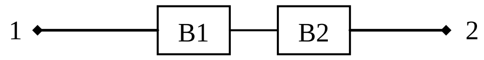


Blok 2

Blok 2 nefunguje právě tehdy, není-li funkční ani jedna ze součástek C, D, E. Vzhledem k nezávislosti poruch jednotlivých součástek můžeme říci, že:

$$P(\overline{B2}) = P(\overline{C} \cap \overline{D} \cap \overline{E}) = P(\overline{C}).P(\overline{D}).P(\overline{E}) = 0{,}2.0{,}3.0{,}2 = 0{,}012$$
$$P(B2) = 1 - P(\overline{B2}) = 1 - 0{,}012 = 0{,}988$$

Celý systém je při tomto značení dán sériovým zapojením Bloku 1 a Bloku 2. Zbývá nám tedy již jen určit spolehlivost celého systému (pravděpodobnost, že systém bude funkční).



S … systém je funkční

$$\underline{\underline{P(S)}} = P(B1 \cap B2) = P(B1) \cdot P(B2) = 0{,}63 \cdot 0{,}988 \cong \underline{\underline{0{,}62}}$$

Pravděpodobnost toho, že z bodu 1 do bodu 2 bude protékat elektrický proud je asi 62%.

Výklad:

2.3.5 Podmíněná pravděpodobnost

Často se setkáváme s **podmíněnou pravděpodobností.** Jedná se o *pravděpodobnost jevu za podmínky, že nastal určitý jiný jev*.

V podstatě si můžeme představit, že n-krát realizujeme nějaký náhodný pokus a uvažujeme dvě podmnožiny A a B v příslušném základním prostoru, tj. dva jevy související s tímto pokusem. Vyberme teď z posloupnosti realizací pokusu jen ty realizace, při kterých nastal jev B. Pak nás ovšem může zajímat, kolikrát za takové podmínky nastal jev A.

Řešený příklad:

Neprůhledný pytlík obsahuje 10 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus – vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Určete pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhneme bílou kuličku.

Řešení:

Jev	Definice jevu
B1	při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C1	při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička
B2	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C2	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička

Stav pytlíku před první realizací pokusu:

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{10\text{ ks}}\;\underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ}_{5\text{ ks}}$$

Pravděpodobnost, že při první realizaci pokusu vytáhnu bílou (černou) kuličku je zřejmě:

$P(B1) = \dfrac{5}{15}$, resp. $P(C1) = \dfrac{10}{15}$

Je taktéž zřejmé, že stav pytlíku před druhou realizací pokusu závisí na výsledku první realizace.

Stav pytlíku před druhou realizací pokusu, byla-li při prvním pokusu vytažena bílá kulička:

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{10\text{ ks}}\;\underbrace{\circ\circ\circ\circ}_{4\text{ ks}}$$

Stav pytlíku před druhou realizací pokusu, byla-li při prvním pokusu vytažena černá kulička:

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{9\text{ ks}}\;\underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ}_{5\text{ ks}}$$

Z obrázku (a z logického úsudku) vidíme, že výsledek druhé realizace pokusu **závisí** na výsledku první realizace pokusu, jinými slovy: výsledek druhé realizace pokusu **je podmíněn** výsledkem první realizace pokusu.

Můžeme tedy určit pravděpodobnosti následujících jevů:

Jev	**Definice jevu**
B2/B1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C2/B1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
B2/C1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička
C2/C1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička

Na základě obrázku odpovídajících stavu pytlíku před druhou realizaci pokusu při splnění příslušných podmínek (za lomítkem) můžeme určit:

$$P(B2/B1)=\frac{4}{14},\quad P(C2/B1)=\frac{10}{14},\quad P(B2/C1)=\frac{5}{14},\quad P(C2/C1)=\frac{9}{14}$$

Pozn.: *Všimněte si, že:* $P(\overline{A/B})=P(\overline{A}/B)$

Chceme-li tedy určit například pravděpodobnost toho, že v druhém tahu vytáhneme bílou kuličku, musíme vzít v úvahu, že k tomuto jevu může dojít ve dvou případech:

$(B2\cap B1)$ nebo $(B2\cap C1)$

Proto platí: $P(B2)=P((B2\cap B1)\cup(B2\cap C1))$

Jelikož jevy $(B2\cap B1)$ a $(B2\cap C1)$ jsou neslučitelné (nemohou nastat zároveň), platí:

$$P(B2)=P(B2\cap B1)+P(B2\cap C1),$$

$$\underline{\underline{P(B2)}}=P(B2/B1)\cdot P(B1)+P(B2/C1)\cdot P(C1)=\frac{4}{14}\cdot\frac{5}{15}+\frac{5}{14}\cdot\frac{10}{15}=\frac{14}{42}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Obdobně můžeme určit pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhneme černou kuličku.

Výklad:

Podmíněná pravděpodobnost je definována vztahem:

$$P\{A|B\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}$$

kde $P\{B\}\neq 0$.

$P\{A|B\}$ čteme *pravděpodobnost jevu A podmíněná jevem B.*

2.3.6 Nezávislé jevy

Jevy A a B nazýváme **navzájem nezávislými**, jestliže platí:

$$P\{A\cap B\}=P\{A\}.P\{B\}$$

Jevy A a B jsou tedy nezávislé, jestliže pravděpodobnost průniku těchto dvou jevů je rovna součinu pravděpodobností jednotlivých jevů.

V důsledku toho pak pro nezávislé jevy A,B platí: $P\{A|B\} = P\{A\}$

Příklad - hod kostkou:

Jestliže v prvním hodu padne jednička, nijak to neovlivní pravděpodobnost, že jednička padne také ve druhém hodu. Pravděpodobnost, že v obou hodech padnou jedničky, je pak součinem jednotlivých pravděpodobností.

Definujme si jevy A, B, C takto:

A - "padne jednička v prvním hodu"
B - "padne jednička ve druhém hodu"
C = A ∩ B - "padne jednička v obou hodech"

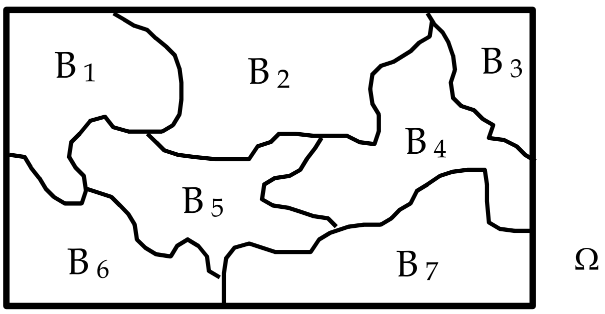
pak platí: $P\{C\} = P\{A \cap B\} = P\{A\}.P\{B\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

2.3.7 Věta o úplné pravděpodobnosti

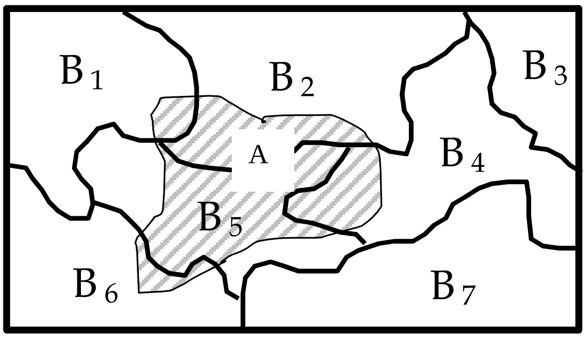
Nechť je dána úplná skupina vzájemně disjunktních jevů $\{B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n\}$, tj.

$$B_i \cap B_j = \emptyset; \forall\ i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

např. pro n=7 (viz. obrázek):



Je zřejmé, že libovolný jev A (viz. obrázek) , ($A \subset \Omega$, P{A}≠0), se skládá z části $(A \cap B_1)$, $(A \cap B_2)$, …, $(A \cap B_n)$.



Tedy:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_{n1}) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

Jelikož jde o sjednocení neslučitelných jevů, musí platit, že pravděpodobnost tohoto sjednocení je dána součtem jednotlivých pravděpodobností.

Ω

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A \cap B_i\}$$

Z definice podmíněné pravděpodobnosti pak dostáváme:

$$P\{A \cap B_i\} = P\{A|B_i\}\,P\{B_i\}$$

z čehož plyne:

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A|B_i\}\,P\{B_i\}$$

Tomuto vztahu pro výpočet pravděpodobnosti jevu A říkáme **věta o úplné pravděpodobnosti**.

2.3.8 Bayesova věta

V některých případech potřebujeme určit $P\{B_k|A\}$. Z definice podmíněné pravděpodobnosti plyne:

$$P\{B_k|A\} = \frac{P\{B_k \cap A\}}{P\{A\}} = \frac{P\{A|B_k\}\,P\{B_k\}}{P\{A\}}$$

Dosadíme-li do jmenovatele větu o úplné pravděpodobnosti, získáme vztah, který označujeme jako **Bayesovu větu** (Bayesův teorém):

$$P\{B_k|A\} = \frac{P\{A|B_k\}\,P\{B_k\}}{\sum_{i=1}^{n} P\{A|B_i\}\,P\{B_i\}}$$

Bayesova věta platí pro výše uvedenou úplnou skupinu vzájemně disjunktních jevů $\{B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n\}$.

Řešený příklad:

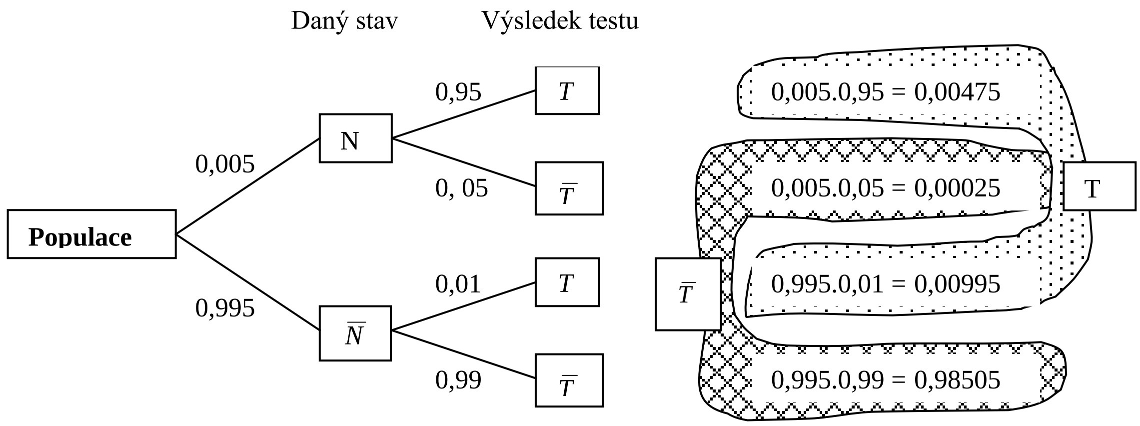
Laboratoř, která provádí rozbory krve, potvrdí s pravděpodobností 95% existencí protilátek na virus určité nemoci, jestliže jí pacient skutečně trpí. Zároveň test určí jako pozitivní 1% osob, které však touto nemocí netrpí. Jestliže 0,5% populace trpí zmíněnou nemocí, jaká je pravděpodobnost, že určitá osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má?

Řešení:

Takovéto problémy směřují k řešení pomocí věty o úplné pravděpodobnosti, popř. pomocí Bayesova teorému. Pro přehledný zápis situace často využíváme tzv. **rozhodovací strom**.

Označme si: N ... pacient trpí nemocí
T ... test na protilátky vyšel pozitivní

Rozhodovací strom pak vypadá takto:



Na spojnice prvního větvení zapisujeme pravděpodobnosti výskytu daného stavu, tj. P(N) a $P(\overline{N})$, přičemž součet pravděpodobností v jednom větvení dává vždy 1 (100%). V našem případě tedy P(N) známe ze zadání a $P(\overline{N})$ určíme jako 1 – P(N).

Na spojnice druhého větvení se pak zapisují podmíněné pravděpodobnosti – “výsledek testu” za předpokladu “daný stav”. V našem případě jsou to pravděpodobnosti: $P(T|N)$, $P(\overline{T}|N)$, $P(T|\overline{N})$, $P(\overline{T}|\overline{N})$. Opět platí, že součet pravděpodobností v jednom větvení dává vždy 1. Ze zadání známe $P(T|N)\ a\ P(T|\overline{N})$ a zbylé dvě podmíněné pravděpodobnosti dopočítáme jako doplňky do 1.

Chceme-li určit, jaká je pravděpodobnost toho, že nastal “daný stav” a zároveň “výsledek testu”, stačí vynásobit hodnoty uvedené u příslušné větve. Např.: pravděpodobnost toho, že pacient trpí nemocí a zároveň mu vyšel negativní test je 0,00025 (

$P(N \cap \overline{T}) = P(N) \cdot P(\overline{T}|N) = 0{,}005 \cdot 0{,}05 = 0{,}00025$). Příslušné pravděpodobnosti jsou uvedeny ve sloupci vedle rozhodovacího stromu.

Pravděpodobnosti toho, že dojde k určitému výsledku testu, se určují prostřednictvím věty o úplné pravděpodobnosti. My je okamžitě vyčteme ze sloupce uvedeného vedle rozhodovacího stromu. Např.: $P(T) = P(N \cap T) + P(\overline{N} \cap T) = 0{,}00475 + 0{,}00995 = 0{,}0147$.

A nyní již přejděme k naší otázce: Měli jsme určit **jaká je pravděpodobnost, že určitá osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má** – neboli: $P(N|T)$

Tuto podmíněnou pravděpodobnost z rozhodovacího stromu přímo nevyčteme, pro její určení použijeme Bayesův teorém:

$$P(N|T) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)},$$

do nějž již stačí pouze dosadit hodnoty vyčtené z rozhodovacího stromu:

$$\underline{\underline{P(N|T)}} = \frac{P(N \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}00475}{0{,}00475 + 0{,}00995} = \frac{0{,}00475}{0{,}0147} = \underline{\underline{0{,}323}}$$

Pravděpodobnost toho, že osoba jejíž test vyšel pozitivní, skutečně onu nemoc má je asi 32,3%. (Zamyslete se nad tím, co by znamenalo, kdyby lékař pouze na základě jednoho pozitivního výsledku testu, označil člověka za nemocného (např. AIDS)).

Σ Shrnutí:

Náhodný pokus je každý konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá, a který je, alespoň teoreticky, neomezeně opakovatelný.
Možné výsledky náhodného pokusu jsou **elementární jevy**.

Množinu všech elementárních jevů nazýváme **základní prostor** (elementárních jevů).

Jevem A je libovolná podmnožina základního prostoru, proto mezi jevy můžeme zavést takové relace, které odpovídají množinovým relacím. Pro jevy také platí všechna tvrzení, která platí pro množiny.

Pravděpodobnostní míra (pravděpodobnost) je reálná funkce definovaná na systému podmnožin základního prostoru, která je nezáporná, normovaná a σ-aditivní**.** Tato funkce má řadu vlastností, jako např. pravděpodobnost sjednocení disjunktních jevů je dána součtem jejich pravděpodobností.

P**odmíněná pravděpodobnost** je pravděpodobnost výskytu jevu za podmínky, že nastal určitý jiný jev, který není nemožný.

Jevy A a B jsou **nezávislé**, jestliže pravděpodobnost průniku těchto dvou jevů je rovna součinu pravděpodobností jednotlivých jevů.

Věta o úplné pravděpodobnosti nám dává návod, jak určit pravděpodobnost jevu *A,* o kterém je známo, že může nastat pouze současně s některým z jevů B_1, B_2, ..., B_n, které tvoří úplný systém neslučitelných jevů.

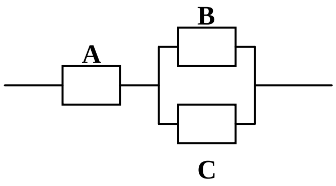
Bayesova věta nám umožňuje spočítat podmíněné pravděpodobnosti jednotlivých jevů této úplné skupiny, za předpokladu, že nastal jev A.

Otázky

1. Jak chápat pojem „pravděpodobnost“ ?
2. Co to jsou axiomy pravděpodobnosti ?
3. Jak se určí pravděpodobnost sjednocení dvou obecných jevů ?
4. Jak se určí pravděpodobnost průniku dvou nezávislých jevů ?
5. Co vyjadřuje Bayesova věta ?

Úlohy k řešení

1. Systém je funkční pokud funguje součástka A a nejméně jedna ze součástek B a C. Pravděpodobnost, že po 1000 hodinách je funkční součástka A je 0,8, součástka B 0,9 a součástka C 0,7. Systém pracuje nezávisle na okolních podmínkách.



Jaká je pravděpodobnost, že systém bude po 1000 hodinách funkční?

2. Ve velkém množství písemek se vyskytují dva typy chyb, A a B. Pravděpodobnost, že v písemce bude chyba A je 0,1 a pravděpodobnost, že tam bude chyba B je 0,2. Pravděpodobnost, že v písemce budou obě chyby zároveň je 0,05. Určete pravděpodobnost, že v písemce bude pouze chyba A, nikoliv chyba B?

3. Sonda má dvě kamery, které mohou pracovat nezávisle na sobě. Každá z nich je vybavena pro případ poruchy korekčním mechanismem. Pravděpodobnost poruchy kamery je 0,1, pravděpodobnost úspěšné opravy případné poruchy pomocí korekčního mechanismu je 0,3. S jakou pravděpodobností se nepodaří ani jednou z kamer nic nafilmovat?

4. Tři absolventi střední školy – pan Novák, pan Svoboda a pan Dvořák skládají přijímací zkoušky na tři různé vysoké školy. Rodiče těchto studentů odhadují jejich šance na úspěch na 70%pro studenta Nováka, na 40% pro studenta Svobodu a na 60% pro studenta Dvořáka. Jaká je pravděpodobnost, že:
   a) všichni tři uspějí
   b) ani jeden neuspěje
   c) uspěje jen student Novák
   d) uspěje právě jeden z nich
   e) neuspěje jen student Svoboda
   f) uspějí právě dva z nich
   g) uspěje alespoň jeden z nich

5. V osudí je 5 černých a 15 bílých koulí. Z osudí se náhodně vytáhne jedna koule. Poté se vrátí zpět a přidá se 20 koulí téže barvy, jakou měla vytažená koule, a tah se opakuje. Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená koule bude černá?

6. Počáteční stadium rakoviny se vyskytuje u každých tří z jednoho tisíce Američanů. Pro včasné zjištění byl vyvinut velmi spolehlivý test. Pouze 5% zdravých pacientů má výsledky pozitivní (falešný poplach) a pouze 2% nemocných mají výsledek negativní. Pokud by se tento test použil pro vyšetření celé americké společnosti a všichni ti, kteří by měli pozitivní výsledky by byli hospitalizováni za účelem klinického vyšetření, kolik % z nich bude skutečně mít rakovinu?

7. Při výrobě 30% přístrojů byl použit zpřísněný technologický režim, zatímco při výrobě ostatních přístrojů standardní režim. Přitom pravděpodobnost bezporuchového chodu po dobu T je pro přístroj z první skupiny 0,97 a pro přístroj z druhé skupiny 0,82. Jaká je pravděpodobnost, že:
   b) přístroj bude po dobu T pracovat bezporuchově?
   c) přístroj, který po dobu T pracoval bezporuchově, byl vyroben ve zpřísněném režimu?

8. Zamýšlíte koupit v autobazaru vůz jisté značky. Je ovšem známo, že 30% takových vozů má vadnou převodovku. Abyste získali více informací, najmete si mechanika, který je po projížďce schopen odhadnout stav vozu a jen s pravděpodobností 0,1 se zmýlí. Jaká je pravděpodobnost, že vůz, který chcete koupit, má vadnou převodovku:
   a) předtím, než si najmete mechanika?
   b) jestliže mechanik předpoví, že vůz je dobrý?

Řešení:

1. 0,776 ~ 77,6%

2. 0,05 ~ 5%

3. 0,0049 ~ 0,49%

4. a) 0,168 ~ 16,8%
   b) 0,072 ~ 7,2%
   c) 0,168 ~ 16,8%
   d) 0,324 ~ 32,4%
   e) 0,252 ~ 25,2%
   f) 0,436 ~ 43,6%
   g) 0,928 ~ 92,8%

5. 0,25 ~ 25%

6. 0,056 ~ 5,6%

7. a) 0,865 ~ 86,5%
   b) 0,336 ~ 33,6%

8. a) 0,30 ~ 30%
   b) 0,045 ~ 4,5%