9 DALŠÍ ROZDĚLENÍ SPOJITÉ NÁHODNÉ VELIČINY

Následující tři spojitá rozdělení, s kterými jsme se seznámili nacházejí uplatnění zejména při odhadech a testování statistických hypotéz. Jejich 100p%-ní kvantily jsou pro vybrané p a vybrané parametry tabelovány

Název rozdělení	Definice NV s daným rozdělením	Parametry	Vlastnosti
Chí-kvadrát χ_n^2	$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$	n	$\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} \to \chi_{n-1}^2$
Studentovo t	$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$	n	$\frac{\overline{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n} \to t_{n-1}$
Fischerovo-Snedecorovo F	$F_{n,m} = \frac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}}$	m, n	$\frac{S_1^2}{S_2^2} \to F_{n_1,n_2}$

9.1. Odvoďte distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X, která má rozdělení χ_n^2 s jedním stupněm volnosti.

Řešení:

$$X = Z^2$$

$$Z \to N(0;1) \quad \Rightarrow \quad X \to \chi_1^2$$

Náhodná veličina X je funkcí náhodné veličiny Z a proto budeme při hledání její distribuční funkce dále postupovat již známým způsobem (pouze vezmeme v úvahu, že náhodná veličina s rozdělením χ_n^2 nabývá pouze kladných hodnot):

$pro\ x > 0:$

$$F(x) = P(X < x) = P(Z^2 < x) = P(-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - [1 - \Phi(\sqrt{x})] =$$

$$= 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t}{2}}dt - 1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{t}{2}}dt - 1$$

$pro\ x \le 0:$

$F(x) = 0$

Hustotu pravděpodobnosti pak určíme jednoduše jako derivaci distribuční funkce:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases} 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\varphi\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\varphi\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

9.2. Dokažte, že: $\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$ **(viz. vlastnosti rozdělení Chí-kvadrát)**

Důkaz:

$$\chi^2_n=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\text{ , kde }Z_i\to N(0;1)$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2\Rightarrow\frac{s^2}{\sigma^2}\cdot(n-1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2,$$

Pomocí dalších úprav (zdlouhavé), které vedou na nahrazení průměru střední hodnotou, bychom zjistili, že:

$$\frac{s^2}{\sigma^2}\cdot(n-1)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{n-1}Z_i^2$$

(Nahrazení průměru střední hodnotou vede na ztrátu jednoho stupně volnosti.)

A tedy: $\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$

9.3. Dokažte, že $\frac{\bar{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n}\to t_{n-1}$ **(viz. Vlastnosti Studentova rozdělení)**

Řešení:

Pokud náhodné veličiny $X_1,X_2,\dots,X_n$ mají normální rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$ a jsou navzájem nezávislé, pak lze snadno ukázat (viz. Centrální limitní věta), že

$$\bar{X}\to N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

a dále po standardizaci (transformaci normální na normovanou normální náhodnou veličinu) platí:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\to N(0,1)$$

Dále víme, že:

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2} \quad \rightarrow \ \chi^2_{n-1}$$

Studentova náhodná veličina je definována jako:

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}},$$

Proto:

$$T_{n-1} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}}$$

Jako náhodné veličiny Z a χ^2_{n-1} tedy mějme:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}; \qquad \chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}$$

Pak:

$$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}}{n-1}}} \rightarrow t_{n-1}$$

Po úpravě:

$$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\cdot\frac{\sigma}{s} = \frac{\overline{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n} \rightarrow t_{n-1}$$

9.4. Nechť máme dva náhodné vektory: $\overline{X_1};\overline{X_2}$

$$X_{1j} \ \rightarrow \ N(\mu_1,\sigma_1); \quad \mathrm{j} = 1, \mathrm{n}_1$$
$$X_{2j} \ \rightarrow \ N(\mu_2,\sigma_2); \quad \mathrm{j} = 1, \mathrm{n}_2$$

S_1; S_2 jsou náhodné veličiny definované jako:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{1j} - \overline{X_1}\right)^2}{n_1 - 1}; \qquad S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{2j} - \overline{X_2}\right)^2}{n_2 - 1}$$

Dokažte, že:

$$\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \to F_{n_1,n_2}$$

Řešení:

Náhodná veličina s Fischer-Snedecorovým rozdělením je definována jako:

$$F_{n,m} = \frac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}}$$

Z příkladu 7.11. víme,že:

$$\frac{(n_1 - 1)\, S_1^2}{\sigma_1^2} \to \chi^2_{n_1 - 1} \qquad \frac{(n_2 - 1)\, S_2^2}{\sigma_2^2} \to \chi^2_{n_2 - 1}$$

Je zřejmé, že:

$$\frac{\frac{\frac{(n_1 - 1)\cdot S_1^2}{\sigma_1^2}}{n_1 - 1}}{\frac{\frac{(n_2 - 1)\cdot S_2^2}{\sigma_2^2}}{n_2 - 1}} \to F_{n_1 - 1, n_2 - 1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\cdot S_2^2}{\sigma_2^2}} \to F_{n_1 - 1, n_2 - 1}$$
