6 VYBRANÁ ROZDĚLENÍ DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ VELIČINY

Rozdělení náhodné veličiny X je předpis, kterým definujeme pravděpodobnost jevů, jež lze touto náhodnou veličinou popsat.

Základním rozdělením popisujícím výběry bez vracení je **hypergeometrické rozdělení**.

Název NV X	Popis	Pravděpodobnostní funkce
Hypergeometrická	Počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru **n** prvků, který byl proveden ze základního souboru rozsahu **N** (v základním souboru má **M** prvků sledovanou vlastnost)	$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$; pro max(n - N + m;0) ≤ k ≤ min(M;n)

Bernoulliho pokusy:

- posloupnost **nezávislých** pokusů majících pouze 2 možné výsledky (událost nastane-nenastane; úspěch-neúspěch; popřípadě 1-0)
- pravděpodobnost výskytu události (úspěchu) p je konstantní v každém pokuse

Rozdělení diskrétní náhodné veličiny založené na Bernoulliho pokusech:

Název NV X	Popis	Pravděpodobnostní funkce	EX	DXl
Binomická	Počet úspěchů (k) v n pokusech	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k};$ $0\le k\le n$	np	$np(1-p)$
Alternativní	Počet úspěchů v jednom pokusu	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
Geometrická	Počet pokusů (n) do 1. úspěchu	$P(X=n)=p(1-p)^{n-1};$ $1\le n<\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$
Negativně binomická	Počet pokusů (n) do k-tého úspěchu	$P(X=n)=\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k};$ $k\le n<\infty$	$\frac{k}{p}$	$\frac{k(1-p)}{p^2}$

Poissonův proces popisuje výskyt náhodných událostí na nějakém pevném časovém intervalu (popř. na vymezené prostorové oblasti - ploše).

U tohoto procesu musí být dodrženy dva předpoklady:

- rychlost výskytu událostí je konstantní v průběhu celého intervalu (popř. hustota výskytu je konstantní na vymezené ploše
- jednotlivé události musí být nezávislé

Rozdělení diskrétní náhodné veličiny založené na Poissonově procesu:

Název NV X	Popis	Pravděpodobnostní funkce	EX	DXl
Poissonova	Počet události (k) v časovém intervalu (na ploše) (t)	$P(X=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$; $0 \le k \le \infty$	λt	λt

6.1. Mezi 200 vajíčky určenými pro prodej v jisté maloobchodní prodejně je 50 vajíček prasklých. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li si náhodně 20 vajec, bude 8 z nich prasklých?

Řešení:

Jde o výběr bez vracení (vybrané vajíčko nevracíme zpět), jednotlivé pokusy jsou závislé.

Nadefinujeme-li si náhodnou veličinu X jako:

X … počet prasklých vajíček mezi 20-ti vybranými

pak má tato náhodná veličina hypergeometrické rozdělení s parametry: N=200; M=50; n=20

$$X \rightarrow H(200;50;20)$$

200 (celkový počet vajec)

50 (počet prasklých vajec) **150** (počet dobrých vajec)

Vzorec pro pravděpodobnostní funkci hypergeometrického rozdělení si nemusíme pamatovat, hledanou pravděpodobnost určíme z klasické definice pravděpodobnosti.

Počet všech možností: vybíráme 20 vajec z 200 vajec (bez ohledu na pořadí)

$$C_{20}(200)=\binom{200}{20}$$

Počet příznivých možností: mezi vybranými 20-ti vejci má být 8 prasklých, tj. vybíráme 8 prasklých vajec z 50-ti prasklých a zároveň 12 (20-8) dobrých vajec ze 150-ti :

$$C_8(50)\cdot C_{12}(150)=\binom{50}{8}\binom{150}{12}$$

A proto:

$$\underline{\underline{P(X=8)}} = \frac{\binom{50}{8}\cdot\binom{150}{12}}{\binom{200}{20}} = \underline{\underline{0{,}057 = 5{,}7\%}}$$

Pravděpodobnost, že mezi 20-ti vybranými vejci bude 8 prasklých je 0,057.

6.2. Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině s 8 dětmi jsou:

a) právě 3 dívky
b) více než 2 dívky
c) méně než 3 dívky

Řešení:

Považujeme-li narození dítěte za náhodný pokus, pak studovanou náhodnou veličinou X je počet dívek v rodině s 8 dětmi.

Předpokládejme, že náhodné pokusy jsou nezávislé, tj. že znalost pohlaví prvního narozeného dítěte neovlivní pravděpodobnost narození dítěte určitého pohlaví při dalším „pokusu“, a mají pouze 2 možné výsledky (dívka, chlapec). Pak můžeme náhodnou veličinu X považovat za binomickou (určuje počet úspěchů (narození dívky) v n (8) pokusech, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu konstantní (0,49).

X … počet dívek v rodině s 8 dětmi

$X \rightarrow Bi(n,p)$, tj. $X \rightarrow Bi(8;0{,}49)$

Rozdělení binomické náhodné veličiny: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Parametry binomického rozdělení z tohoto příkladu:

náhodný pokus	**úspěch**	**neúspěch**	**počet pokusů**	**pravděpodobnost úspěchu**	**počet úspěchu**
			n	p	k
narození dítěte	dívka	chlapec	8	0,49	

ada) k = 3

$$\underline{\underline{P(X=3)}} = \binom{8}{3}(0{,}49)^3(1-0{,}49)^{8-3} = \frac{8!}{5!.3!}(0{,}49)^3(0{,}51)^5 = \underline{\underline{0{,}23 = 23\%}}$$

adb) k > 2; tj. k = 3; 4; 5; 6; 7; 8

$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=$$
$$=\sum_{k=3}^{8}\binom{8}{k}0{,}49^{k}(0{,}51)^{8-k}$$

Vzhledem k tomu, že tento výpočet je poněkud zdlouhavý, pokusíme se hledanou pravděpodobnost najít pomocí pravděpodobnosti doplňku.

$$\underline{\underline{P(X>2)}}=1-P(X\le 2)=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]=1-\sum_{k=0}^{2}\binom{8}{k}0{,}49^{k}(0{,}51)^{8-k}=$$
$$=1-0{,}16=\underline{\underline{0{,}84=84\%}}$$

adc) k < 3; tj. k = 0; 1; 2

$$\underline{\underline{P(X<3)}}=[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]=\sum_{k=0}^{2}\binom{8}{k}0{,}49^{k}(0{,}51)^{8-k}=\underline{\underline{0{,}16=16\%}}$$

6.3. Dva hráči (Albert a Bartoloměj) se střídají a házejí hrací kostkou. Vyhraje ten komu padne „6“. Jaká je pravděpodobnost výher jednotlivých hráčů?

Řešení:

Provádíme náhodné pokusy mající 2 možné výsledky (úspěch – „6“, neúspěch). Pravděpodobnost úspěchů je v jednotlivých pokusech konstantní (p=1/6). Jde tedy o Bernoulliho pokusy.

Hra končí ve chvíli, kdy padne „6“ (je dosaženo úspěchu). Nechť začíná Albert.

S … úspěch, F … neúspěch

Výsledky svědčící pro výhru Alberta:

S
FFS
FFFFS
.
.
.

Albert vyhraje v případě, že počet pokusů do 1. úspěchu (včetně) bude liché číslo.

X … počet pokusů do 1. úspěchu, $X \to G\left(\frac{1}{6}\right)$

$$P(X=n)=p\cdot(1-p)^{n-1}$$

A … vyhraje Albert $\Leftrightarrow (n)\ldots liché \Leftrightarrow (n-1)\ldots sudé$

$$P(A) = p \cdot (1-p)^0 + p \cdot (1-p)^2 + p \cdot (1-p)^4 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^{2j}$$

Jde o součet nekonečné geometrické řady, kde:

$$a_1 = p \cdot (1-p)^0 = p$$
$$q = (1-p)^2$$

$$\underline{\underline{P(A)}} = \sum_{j=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^{2j} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11} = 0,\overline{54} \cong \underline{\underline{0,545}}$$

6.4. Jaká je pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+, budeme muset vyšetřit:

a) právě 10 osob neznajících svou krevní skupinu
b) více než 9 osob neznajících svou krevní skupinu
c) více než 7 a méně než 12 osob neznajících svou krevní skupinu

Řešení:

Předpokládejme, že máme 8 krevních skupin (A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, 0+, 0-), které se vyskytují se stejnou pravděpodobností. Za náhodný pokus budeme považovat vyšetření jedné osoby (2 možné výsledky - má krevní skupinu A+ (úspěch), nemá krevní skupinu A+). Definujeme-li si náhodnou veličinu X jako:

X … počet osob, které musíme vyšetřit, chceme-li najít 3 dárce s krevní skupinou A+

Pak můžeme X považovat za negativně binomickou náhodnou veličinu:

$$X \rightarrow NB\left(3, \frac{1}{8}\right)$$

Pravděpodobnostní funkce X pak vypadá takto:

$$P(X=n) = \binom{n-1}{3-1}\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(1-\frac{1}{8}\right)^{n-3} = \binom{n-1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right)^{n-3}; \qquad 3 \le n < \infty$$

Nyní můžeme přistoupit k hledání konkrétních pravděpodobností:

ada) $\underline{\underline{P(X=10)}} = \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^7 = \underline{\underline{0,028 = 2,8\%}}$

adb)

$$\underline{\underline{P(X>9)}} = \mathrm{P}(10) + \mathrm{P}(11) + P(12) + \ldots =$$

$$= 1 - P(X \le 9) = 1 - \sum_{n=3}^{9} \binom{n-1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(\frac{7}{8}\right)^{n-3} = \underline{\underline{0{,}908 = 90{,}8\%}}$$

adc)

$$\underline{\underline{P(7 < X < 12)}} = \mathrm{P}(8) + \mathrm{P}(9) + \mathrm{P}(10) + \mathrm{P}(11)$$

$$= \sum_{n=8}^{11} \binom{n-1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(\frac{7}{8}\right)^{n-3} = \underline{\underline{0{,}103 = 10{,}3\%}}$$

6.5. V nemocnici ABC se průměrně 30x ročně vyskytne porucha srdeční činnosti po určité operaci. Určete:

a) pravděpodobnost, že se v nemocnici ABC vyskytne příští měsíc právě 5 těchto poruch
b) pravděpodobnost, že se v nemocnici ABC vyskytne příští měsíc 2 a více těchto poruch
c) střední hodnotu a směrodatnou odchylku počtu těchto poruch během jednoho měsíce

Řešení:

Předpokládejme, že se jednotlivé poruchy srdeční činnosti po dané operaci vyskytují nezávisle na sobě, s konstantní rychlosti výskytu. Pak můžeme náhodnou veličinu

X … počet výskytu poruch srdeční činnosti během měsíce
(po dané operaci, v nemocnici ABC)

považovat za náhodnou veličinu s Poissonovým rozdělením. Její parametr – λt – určíme jako průměrný počet výskytu poruch srdeční činnosti během měsíce (střední hodnota Poissonova rozdělení je rovna λt).

$$\text{t = 1 měsíc} \Rightarrow EX = \lambda t = \frac{30}{12} = 2{,}5\left[mesic^{-1}\right] \Rightarrow X \to Po(2{,}5)$$

$$P(X=k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}; \qquad 0 \le k < \infty$$

ada) Pravděpodobnost, že se v nemocnici ABC vyskytne příští měsíc právě 5 těchto poruch, určíme jednoduše dosazením do pravděpodobnostní funkce.

$$\underline{\underline{P(X=5)}} = \frac{(2{,}5)^5 e^{-2{,}5t}}{5!} = \underline{\underline{0{,}067 = 6{,}7\%}}$$

adb) Pravděpodobnost, že se v nemocnici ABC vyskytne příští měsíc 2 a více těchto poruch, bychom museli určit jako součet pravděpodobností pro počet výskytu (k) od 2 do ∞. Proto použijeme v tomto případě pravděpodobnost doplňku daného jevu:

$$\underline{\underline{P(X \geq 2)}} = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} =$$
$$= 1 - \left[e^{-2,5} + 2,5e^{-2,5}\right] = 1 - 3,5e^{-2,5} \underline{\underline{= 0,713 = 71,3\%}}$$

adc) Střední hodnota i rozptyl náhodné veličiny X jsou rovny jejímu parametru, směrodatná odchylka je rovna odmocnině z rozptylu.

$$\underline{\underline{EX}} = DX =; \lambda t \underline{\underline{= 2,5}} \quad \underline{\underline{\sigma_X}} = \sqrt{\mathrm{DX}} = \sqrt{2,5} \underline{\underline{\cong 1,6}}$$

6.6. Sklovina na výrobu láhví obsahuje kazy. Průměrný počet kazů je x na metrický cent (100 kg). Láhev váží 1 kg.
a) Jaký je podíl vadných láhví?
b) Jak se tento podíl změní bude-li láhev vážit 0,25 kg?

Řešení:

100 kg	…	průměrně x kazů
1 kg	…	průměrně (x/100) kazů
0,25 kg	…	průměrně (x/400) kazů

X … počet kazů na láhvi, $X \to Po(\lambda t)$

podíl vadných láhví ≈ pravděpodobnost, že na láhvi bude alespoň jeden kaz

ada) $EX = \lambda t = (x/100)$

$$\underline{\underline{P(X > 0)}} = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(e^{-\frac{x}{100}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{100}\right)^0}{0!} \right) = \underline{\underline{1 - e^{-\frac{x}{100}}}}$$

adb) $EX = \lambda t = (x/400)$

$$\underline{\underline{P(X > 0)}} = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(e^{-\frac{x}{400}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{400}\right)^0}{0!} \right) = \underline{\underline{1 - e^{-\frac{x}{400}}}}$$

Pro řešení následujících příkladů použijeme Statgraphics.

6.7. Student VŠB Pepe má potíže s ranním vstáváním. Proto někdy zaspí a nestihne přednášku, která začíná již v 9 hodin. Pravděpodobnost, že zaspí, je 0,3. V semestru je 12 přednášek - tzn. 12 nezávislých pokusů dorazit na přednášku včas. Nalezněte pravděpodobnost, že Pepe nestihne přednášku v důsledku zaspání v polovině nebo více případů.

Řešení:

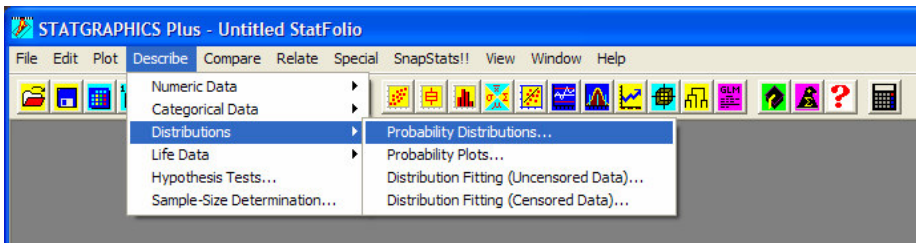
X … počet přednášek, na které Pepe nedorazil z důvody zaspání, z 12 možných

Je zřejmé, že $X \to Bi(12;0{,}3)$

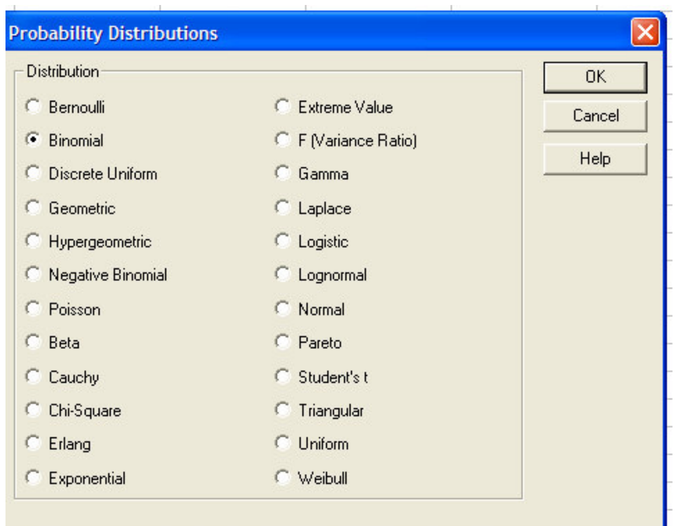
$$P(X \geq 6) = P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) = \sum_{k=6}^{12} \binom{12}{k} \cdot (0{,}3)^k \cdot (0{,}7)^{12-k}$$

Ruční výpočet by v tomto případě byl poměrně zdlouhavý. Máme-li ale k dispozici statistický software, např. Statgraphics, můžeme příklad snadno vypočíst pomocí distribuční funkce binomického rozdělení.

Ve Statgraphicsu použijeme: **Menu Describe \ Distributions \ Probability Distributions**



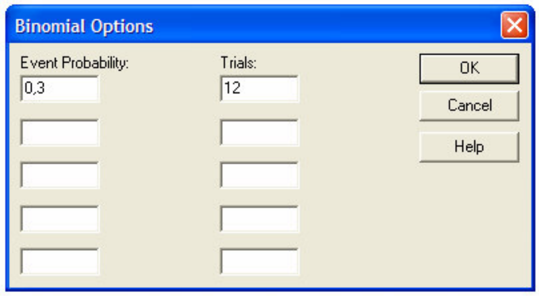
V okně **Probability Distributions** zvolíme binomické rozdělení (**Binomial**).



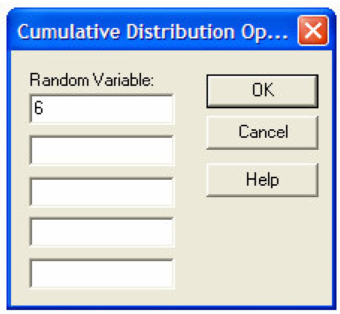
Jako textový výstup této procedury dostaneme v levém dolním okně hodnoty **pravděpodobnostní funkce** (**Probability Mass (=)**), distribuční funkce neboli pravděpodobnosti **P(X<x)** (**Lower Tail Area (<)**) a hodnoty pravděpodobnosti **P(X>x)** (**Upper Tail Area (>)**). To vše pro náhodnou veličinu X, která má binomické rozdělení s parametry n=10, p=0,1 $(X \to Bi(10;0{,}1))$, v bodě x=0.

My však chceme hodnoty pravděpodobnosti $P(X \geq 6)$, tj. v bodě x=6 – pro X, která má binomické rozdělení s parametry n=12, p=0,3 $(X \to Bi(12;0{,}3))$.

Nastavení parametrů binomického rozdělení provedeme v menu **Analysis Options**, které získáme provedením RC (kliknutí pravou myší) na oblast textového výstupu.



Pravděpodobnost úspěchu je označena jako **Event Probability** a počet pokusů **Trials.**
Hodnotu (resp. hodnoty), v nichž chceme pravděpodobnost určit zadáme v menu **Pane Option**, které získáme rovněž provedením RC na oblast textového výstupu.



Tato hodnota je označena jako **Random Variable**.

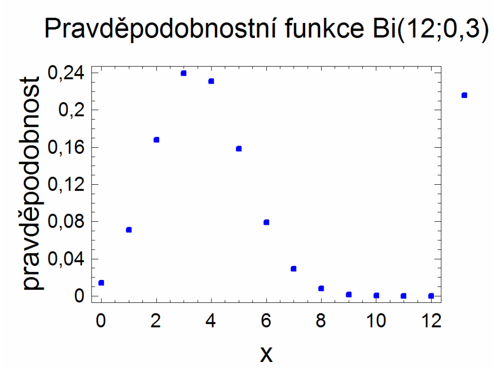
Nyní již stačí pouze odečíst odpověď:

```
Distribution: Binomial

              Lower Tail Area (<)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
6             0,882151

              Probability Mass (=)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
6             0,0792479

              Upper Tail Area (>)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
6             0,0386007
```

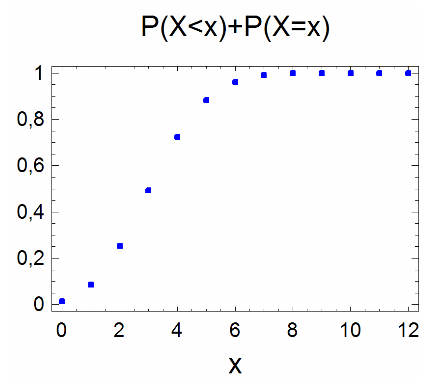
$$\underline{\underline{P(X \geq 6)}} = P(X > 6) + P(X = 6) = 0{,}0386007 + 0{,}0792479 = 0{,}1178486 \cong \underline{\underline{0{,}118}}$$

Po provedeném nastavení parametru binomického rozdělení získáme jako **grafický výstup pro** $X \to Bi(12;0{,}3)$**:**

a) **pravděpodobnostní funkci:**



b) **funkci, která je označována jako distribuční** (**POZOR!!!** Jde o $P(X \leq x)$ (jiný způsob definice distribuční funkce – definice není jednoznačná (statistici se stále ještě nedohodli – záleží na autorovi)) a navíc je zakreslena pouze v bodech, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová. Z těchto důvodů my danou funkci **neoznačujeme** jako funkci distribuční.)



Komentář ke grafickým výstupům následujících příkladů se shoduje s komentářem příkladu 6.6, proto jej nebudeme zmiňovat.

6.8. Mezi stovkou výrobků je 20 zmetků. Vybereme deset výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že je mezi nimi více než 4 vadných?

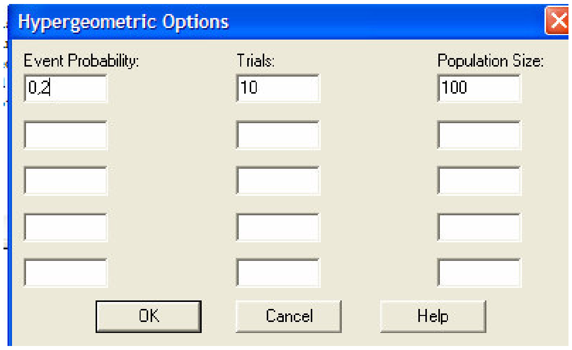
V tomto případě jde o opakované závislé pokusy (nikoli o Bernoulliho pokusy) a proto má náhodná veličina X hypergeometrické rozdělení: $X \to H(100;20;10)$.

Postupujeme obdobně jako u předcházejícího příkladu:

Menu Describe \ Distributions \ Probability Distributions

V okně **Probability Distributions** zvolíme hypergeometrické rozdělení (**Hypergeometric**)

Pro nastavení parametrů rozdělení provedeme RC na textový výstup a v menu **Analysis Option**s nastavení provedeme.



Jako **Event Probability** zadáváme procentuální zastoupení prvků s danou vlastností v základním souboru (procento zmetků mezi 100 výrobky), **Trials** označuje rozsah výběru a **Population Size** je rozsah základního souboru.

Hodnotu, v níž chceme pravděpodobnost určovat, nastavíme v menu **Pane Option** (RC na textový výstup).

Nyní odečteme hledanou pravděpodobnost:

```
Distribution: Hypergeometric

              Lower Tail Area (<)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
4             0,890429

              Probability Mass (=)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
4             0,0841073

              Upper Tail Area (>)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
4             0,0254642
```

$$\underline{\underline{P(X > 4)}} = 0,0254642 \cong \underline{\underline{0,025}}$$

6.9. Jaká je pravděpodobnost, že proto aby nám padla na klasické kostce „6“, musíme házet:

a) právě 5x
b) více než 3x

Řešení:

Považujeme-li za náhodný pokus hod kostkou (opakované hody tvoří Bernoulliho pokusy), pak počet hodů nutných k 1. úspěchu (padnutí „6“) je geometrickou náhodnou veličinou X s parametrem p = 1/6 (pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu).

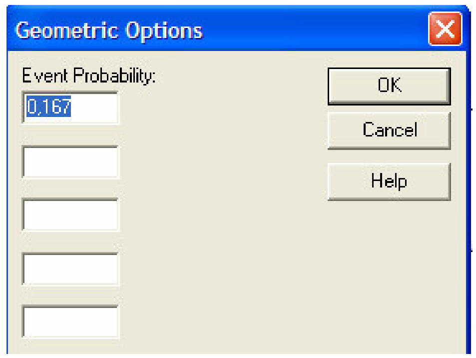
$$X \to G\left(\frac{1}{6}\right)$$

Postupujeme podle již známého schématu:

Menu Describe \ Distributions \ Probability Distributions

V okně **Probability Distributions** zvolíme geometrické rozdělení (**Geometric**)

Pro nastavení parametrů rozdělení provedeme RC na textový výstup a v menu **Analysis Option**s nastavení provedeme.

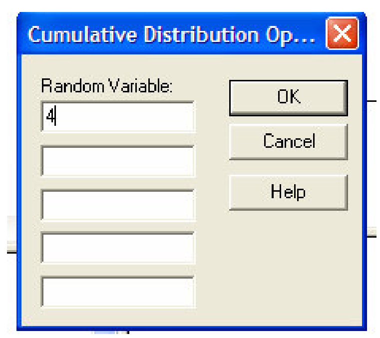


Event Probability označuje pravděpodobnost úspěchu.

Hodnotu, v níž chceme pravděpodobnost určovat, nastavíme v menu **Pane Option** (RC na textový výstup).

POZOR!!! Statgraphics používá odlišnou definici geometrické náhodné veličiny – počet pokusů (neúspěchů) **před** prvním úspěchem.

ada)
Chceme určit pravděpodobnost, že musíme házet právě 5x, tj. pravděpodobnost, že před prvním úspěchem dojde právě ke 4 neúspěchům.



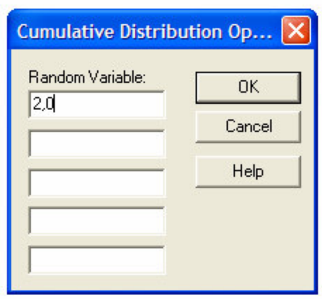
Random Variable označuje v tomto případě požadovaný počet neúspěchu.

Nyní můžeme odečíst výsledek:

```
-----------------------

Distribution: Geometric

               Lower Tail Area (<)
Variable       Dist. 1        Dist. 2        Dist. 3        Dist. 4        Dist. 5
2              0,306111

               Probability Mass (=)
Variable       Dist. 1        Dist. 2        Dist. 3        Dist. 4        Dist. 5
2              0,115879

               Upper Tail Area (>)
Variable       Dist. 1        Dist. 2        Dist. 3        Dist. 4        Dist. 5
2              0,57801
```

Pravděpodobnost, že poprvé padne „6“ v 5. hodu je 8,0%.

adb)
Chceme určit pravděpodobnost, že musíme házet více než 3x, tj. pravděpodobnost, že před prvním úspěchem dojde k více než 2 neúspěchům.



Pravděpodobnost, že poprvé padne „6“ nejdříve ve 4. hodu je 57,8%.

6.10. Jaká je pravděpodobnost, že proto aby nám při hodu minci padl 5x lev, budeme muset hodit:
a) právě 10x
b) alespoň 10x

Řešení:

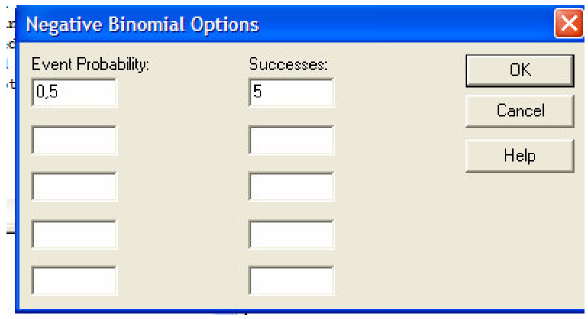
X … počet hodů mincí nutných pro dosažení 5 úspěchů, $X \rightarrow NB(5;0{,}5)$

POZOR!!! Vzhledem k tomu, že geometrická NV je speciálním typem negativně binomické NV(pro k=1), mohli bychom očekávat u Statgraphicsu rovněž odlišnou definici negativně binomické náhodné veličiny – počet neúspěchů **před** k-tým úspěchem (např. Excel). Definice použitá Statgraphicsem však **souhlasí** s definicí, kterou jsme si zavedli my (počet pokusů do k-tého úspěchu (včetně)). **Jde o chybu Statgraphicsu** (nesouhlasí to ani s Help).

Menu Describe \ Distributions \ Probability Distributions

V okně **Probability Distributions** zvolíme negativně binomické rozdělení (**Negative Binomial**)

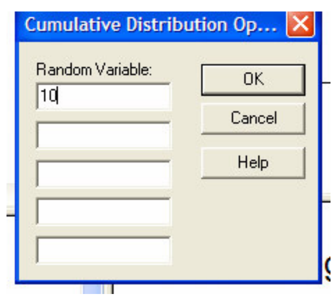
Pro nastavení parametrů rozdělení provedeme RC na textový výstup a v menu **Analysis Option**s nastavení provedeme.



Event Probability označuje pravděpodobnost úspěchů, **Successes** označuje požadovaný počet úspěchů.

Hodnotu, v níž chceme pravděpodobnost určovat, nastavíme v menu **Pane Option** (RC na textový výstup).

Chceme-li určit pravděpodobnost, že musíme házet celkem právě (resp. více než) 10x, zadáme jako **Random Variable** (celkový počet pokusů) 10.




```
Distribution: Negative Binomial

              Lower Tail Area (<)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
10            0,5

              Probability Mass (=)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
10            0,123047

              Upper Tail Area (>)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
10            0,376953
```

ada) $\underline{\underline{P(X=10)}} \cong \underline{\underline{0{,}123}}$

adb) $\underline{\underline{P(X \geq 10)}} = P(X > 10) + \mathrm{P}(X = 10) = 0{,}376953 + 0{,}123047 = \underline{\underline{0{,}5}}$

(tuto pravděpodobnost bychom mohli najít také jako $P(X \geq 10) = P(X > 9)$)

6.11. Během 10 minut spadne průměrně jedna hvězda. Jaká je pravděpodobnost, že během 15 minut spadnou dvě hvězdy?

Řešení:

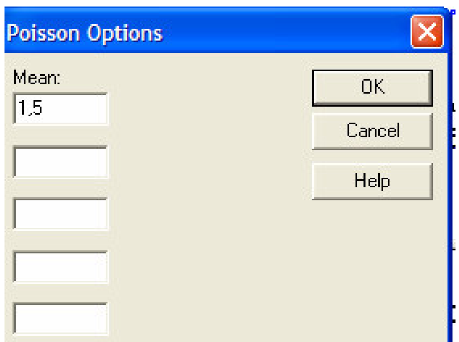
X … počet hvězd spadlých během 15 minut, $X \to Po(\lambda t)$

$EX = \lambda t = 1{,}5$ (za 15 minut spadne průměrně 1,5 hvězdy

Menu Describe \ Distributions \ Probability Distributions

V okně **Probability Distributions** zvolíme Poissonovo rozdělení (**Poisson**)

Pro nastavení parametrů rozdělení provedeme RC na textový výstup a v menu **Poisson Options** nastavení provedeme.



Mean označuje střední hodnotu (λt).

Hodnotu, v níž chceme pravděpodobnost určovat, nastavíme v menu **Pane Options** (RC na textový výstup).

```
Distribution: Poisson

              Lower Tail Area (<)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
2             0,557825

              Probability Mass (=)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
2             0,251022

              Upper Tail Area (>)
Variable      Dist. 1       Dist. 2       Dist. 3       Dist. 4       Dist. 5
2             0,191153
```

Během 15 minut spadnou dvě hvězdy s pravděpodobnosti 25,1%.

6.12. V každých 100 metrech látky je průměrně 5 kazů. Látku rozstříháme na kusy po 3m. Kolik můžeme očekávat kusů bez kazů?

Tato pravděpodobnost je stejná jako pravděpodobnost, že na náhodně vybraném kusu látky nebude kaz.

X … počet kazů na jednom kusu látky (3m), $X \to Po(\lambda t)$

100 m látky … EX = 5
1 m látky … EX=0,05
3m látky … EX=0,15 $\Rightarrow \lambda t = 0{,}15$

Statgraphics: $\underline{\underline{P(X = 0) = 0{,}861}}$

6.13. Pravděpodobnost, že paměťový prvek je vadný je 2^{-27}. Na čipu je 2^{30} těchto prvků.
a) Jaká je pravděpodobnost, že žádný prvek na čipu není vadný?
b) Jaká je pravděpodobnost, že nejvýše 3 prvky na čipu jsou vadné?

Řešení:

$$X \rightarrow Bi\left(2^{30};2^{-27}\right)$$
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Tento příklad nelze řešit za pomocí Statgraphicsu, neboť $2^{30}>10^9$ a Statgraphics neumožňuje zadání počtu pokusů větší než 10^9.

Pokuste se pro řešení příkladu použít **Excel**. (BINOMDIST , Součet = 0)

ada) $\underline{\underline{P(X = 0)}} = 0{,}00033546 \cong \underline{\underline{0{,}03\%}}$

adb) $\underline{\underline{P(X \leq 3)}} = 0{,}04238 \cong \underline{\underline{4{,}24\%}}$
