4 NÁHODNÁ VELIČINA

Náhodná veličina je veličina, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu (je-li tento výsledek dán reálným číslem). Jde o reálnou funkci definovanou na základním prostoru a charakterizovanou distribuční funkci.

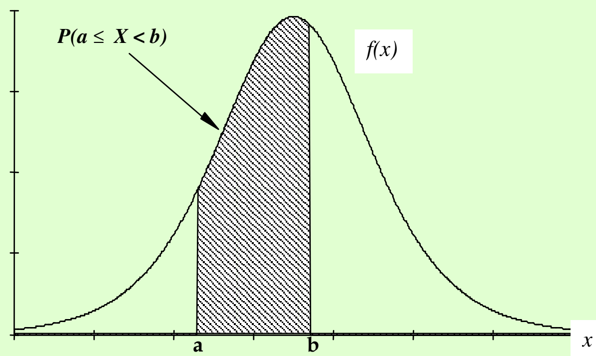
Distribuční funkce je definována jako **F(x) = P(X<x),** jde tedy o funkci, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než toto reálné číslo.

Pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny na nějakém intervalu určujeme na základě těchto vztahů:

$P(X < a) = F(a)$

$P(X \geq b) = 1 - F(b)$

$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$



Podle toho, jakých může náhodná veličina nabýt hodnot (resp. z jakého intervalu), rozlišujeme spojitou a diskrétní náhodnou veličinu, přesněji řečeno náhodnou veličinu se **spojitým a diskrétním rozdělením**.

Diskrétní náhodná veličina je náhodnou veličinou, která může nabývat pouze konečného nebo spočetně nekonečného množství hodnot (např. výsledek hodu kostkou) Diskrétní náhodnou veličinu popisujeme prostřednictvím **pravděpodobnostní funkce**, popř. **distribuční funkce.**

Spojitá náhodná veličina je náhodnou veličinou, která může nabývat všech hodnot z libovolného konečného nebo nekonečného intervalu (např. životnost zářivky) Pro popis spojité náhodné veličiny používáme **distribuční funkci**, **hustotu pravděpodobnosti** a v případě, že jde o nezápornou spojitou náhodnou veličinu používáme také **intenzitu poruch**. Intenzita poruch má pro většinu výrobků z technické praxe charakteristický tvar vanové křivky.

V mnoha případech je výhodné shrnout celkovou informaci o náhodné veličině do několika čísel, které charakterizují některé vlastnosti náhodné veličiny, případně umožňují srovnání různých náhodných veličin. Tato čísla se nazývají **číselné charakteristiky náhodné veličiny.** Mezi základní číselné charakteristiky řadíme např. **střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, kvantily, modus, šikmost** a **špičatost**.

V případě, že *g(x)* je nějaká prostá reálná funkce, definovaná na základním souboru náhodné veličiny X, můžeme snadno odvodit rozdělení **transformované náhodné veličiny** *Y = g(X)*.

Diskrétní náhodná veličina

4.1. Mějme náhodnou veličinu X definovanou jako výsledek hodu klasickou pravidelnou kostkou. Určete typ NV, její pravděpodobnostní a distribuční funkci (zakreslete).

Řešení:

X ... výsledek hodu kostkou

Základní soubor NV X (množina všech možných výsledků): $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Vzhledem k tomu, že základní soubor je tvořen konečně mnoha (šesti) hodnotami, jedná se o **diskrétní NV**

Pravděpodobnostní funkce této NV je uvedena v následující tabulce:

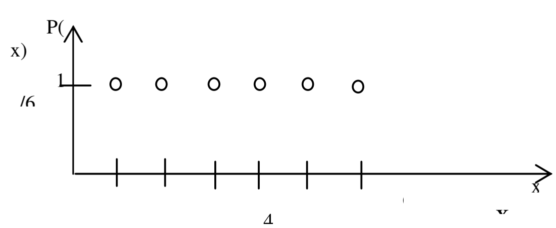
x_i	$P(X = x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

(např. P(X=1) čteme: pravděpodobnost, že výsledek hodu kostkou je 1). V tabulce jsou přitom uvedeny pouze **nenulové** hodnoty pravděpodobnostní funkce. Je zřejmé, že platí:

$$\forall\, x_i \in R \setminus \Omega : P(X = x_i) = 0$$

(např. P(X=1,5)=P(X=-3)= ... = 0). Všimněte si zároveň, že je splněna 2. část definice diskrétní NV : $\sum_{(i)} P(X = x_i) = 1$

Na následujícím obrázku pak vidíme grafickou podobu pravděpodobnostní funkce (izolované body).



Dále se pokusíme na základě definice určit distribuční funkci. Z vlastností distribuční funkce vyplývá, že body nespojitosti této funkce jsou ty body, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová ($P(x = x_0) = \lim_{x \to x_0+} F(x) - F(x_0)$). Proto si určíme hodnoty distribuční funkce na všech intervalech vymezených body nespojitosti.

např.:

$\forall x \in (-\infty;1\rangle : F(x) = P(X < x) = 0$ (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 1)

$\forall x \in (1;2\rangle : F(x) = P(X < x) = 1/6$ (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 2)

$\forall x \in (2;3\rangle : F(x) = P(X < x) = 2/6$ (pravděpodobnost, že na kostce padne číslo menší než 3)

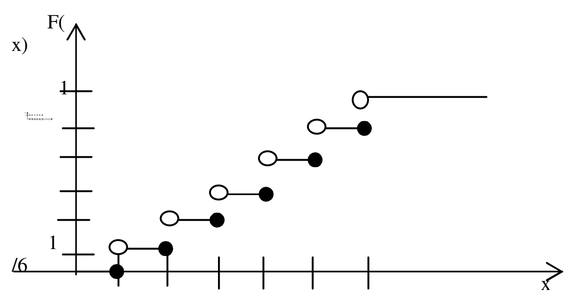
....

Hodnoty distribuční funkce na celém definičním oboru (R) jsou uvedeny v následující tabulce.

x_i	$F(x_i)$
(-∝;1>	0
(1;2>	1/6
(2;3>	2/6
(3;4>	3/6
(4;5>	4/6
(5;6>	5/6
(6;∝)	1

Na grafu distribuční funkce si všimněte jejich vlastností:

- neklesající
- zleva spojitá
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
- $P(X = x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} F(x) - F(x_0)$, tj.:
  - distribuční funkce je nespojitá v bodech, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová
  - velikost „skoku“ v bodech nespojitosti je rovna příslušné pravděpodobnosti



4.2. V osudí je 5 bílých a 7 červených míčků. Náhodná veličina X představuje počet bílých míčků mezi pěti vybranými. Vytvořte pravděpodobnostní a distribuční funkci této náhodné veličiny.

Řešení:

Náhodná veličina X nabývá hodnot $\{0,1,2,3,4,5\}$.

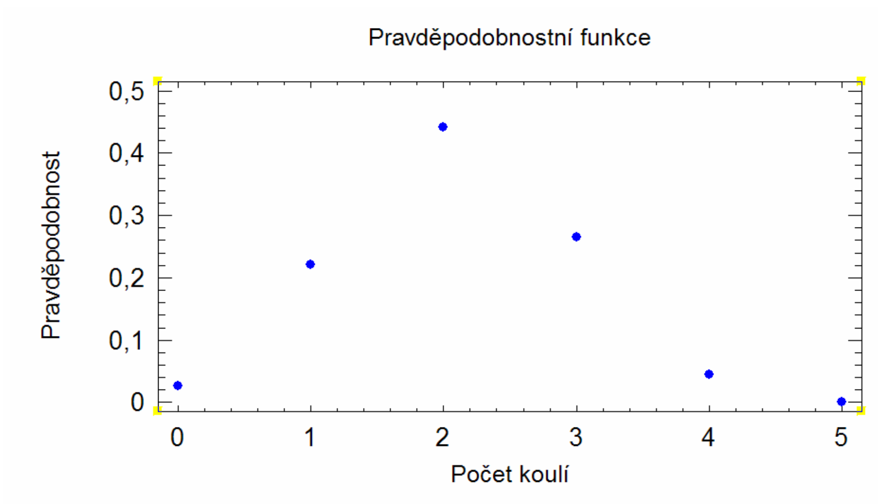
Z teorie pravděpodobnosti víme, že se jedná o opakované závislé pokusy. Je zřejmé, že jde o diskrétní náhodnou veličinu, můžeme tedy sestavit **pravděpodobnostní funkci**:

$$p(x_i)=\frac{\binom{5}{x_i}\cdot\binom{7}{5-x_i}}{\binom{12}{5}}$$

Dosazením jednotlivých hodnot náhodné veličiny do pravděpodobnostní funkce získáme **pravděpodobnostní tabulku**:

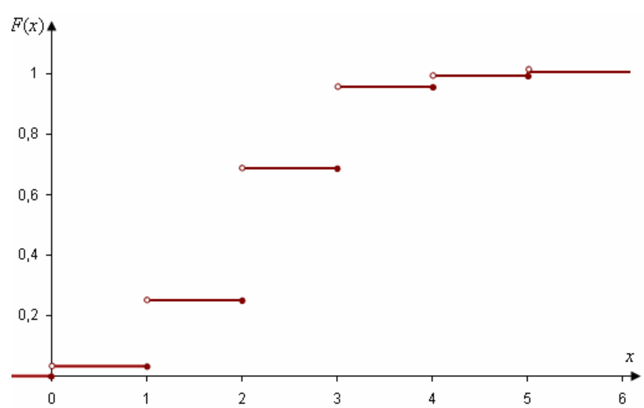
x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	$\frac{21}{792}$	$\frac{175}{792}$	$\frac{350}{792}$	$\frac{210}{792}$	$\frac{35}{792}$	$\frac{1}{792}$

Grafické zobrazení pravděpodobnostní funkce (bodový graf):



Distribuční funkce:

x_i	$F(x_i)$
(-∝;0>	0
(0;1>	21/792
(1;2>	196/792
(2;3>	546/792
(3;4>	756/792
(2;5>	791/792
(5;∝)	792/792=1



Spojitá náhodná veličina

4.3. Nechť Y je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti:

$$f(y) = \begin{cases} c(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & jinde \end{cases}$$

a) nalezněte konstantu c,
b) zakreslete f(y)
c) nalezněte a zakreslete distribuční funkci F(y),
d) určete: P(0<Y<1), P(Y>0,5), P(Y=0,3)

Řešení:

a) pro nalezení konstanty c využijeme toho, že: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

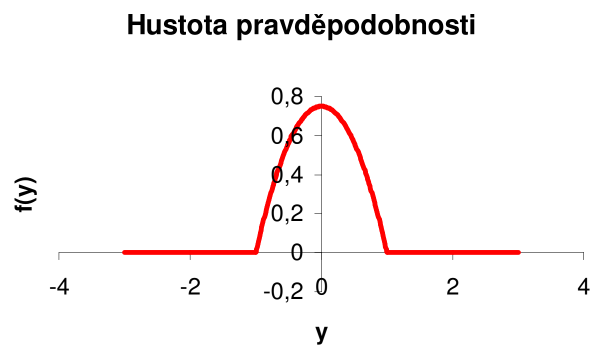
$$\int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{1} c(1-t^2)dt + \int_{1}^{\infty} 0dt = 1$$

$$0 + c\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 0 = 1$$

$$c\left[(1-\frac{1}{3}) - (-1 - \frac{(-1)}{3})\right] = 1$$

$$c.\frac{4}{3} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = \frac{3}{4} = 0{,}75}}$$

b) $$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & jinde \end{cases}$$



c) Distribuční funkci určíme z definice: $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt \qquad pro \quad -\infty < y < \infty$

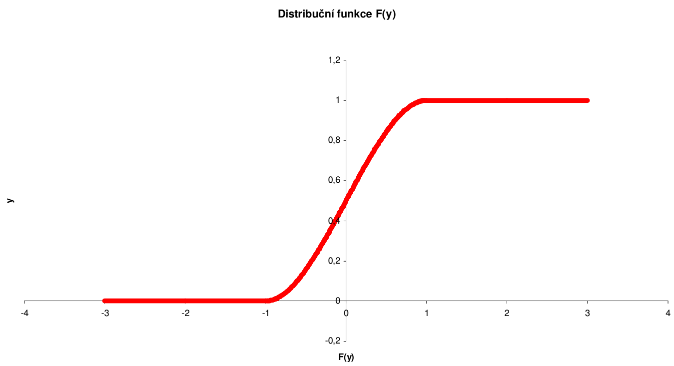
Pro $-\infty < y < -1$: $\quad \underline{\underline{F(y)}} = \int_{-\infty}^{y} 0dt = \underline{\underline{0}}$

Pro $-1 \leq y < 1$:

$$\underline{\underline{F(y)}} = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{y} \frac{3}{4}\left(1-t^2\right)dt = 0 + \frac{3}{4}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{y} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(-y^3+3y+2\right)}}$$

Pro $1 \leq y < \infty$:

$$\underline{\underline{F(y)}} = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-t^2)dt + \int_{1}^{y} 0dt = 0 + \frac{3}{4}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 0 = \underline{\underline{1}}$$



d) Pravděpodobnosti výskytu náhodné veličiny Y na určitém intervalu určíme pomocí příslušných vztahů:

- $\underline{\underline{P(0 < Y < 1)}} = F(1) - F(0) = 1 - \frac{1}{4}(0+0+2) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sim 50\%}}$
- $\underline{\underline{P(Y > 0{,}5)}} = 1 - F(0{,}5) = 1 - \frac{1}{4}(-(\frac{1}{2})^3 + 3.\frac{1}{2} + 2) = 1 - \frac{27}{32} = \underline{\underline{\frac{5}{32} \sim 15{,}6\%}}$
- $\underline{\underline{P(Y = 0{,}3) = 0}}$

Číselné charakteristiky diskrétní náhodné veličiny

4.4. Vraťme se k dříve definované diskrétní náhodné veličině X – hod kostkou. V jednom z výše řešených příkladu jsme si určili a zakreslili její pravděpodobnostní i distribuční funkci.

x_i	$P(X = x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

x_i	$F(x_i)$
(-∞;1>	0
(1;2>	1/6
(2;3>	2/6
(3;4>	3/6
(4;5>	4/6
(5;6>	5/6
(6;∞)	1

Nyní určeme:

a) střední hodnotu
b) rozptyl
c) směrodatnou odchylku
d) medián
e) modus

Řešení:

a) $\underline{\underline{EX}} = \mu = \sum_{(i)} x_i \,.P(x_i) = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \underline{\underline{3{,}5}}$

b) $DX = \mu_2 = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

$$EX^2 = \sum_{(i)} x_i^2 P(x_i) = 1^2.\frac{1}{6} + 2^2.\frac{1}{6} + 3^2.\frac{1}{6} + 4^2.\frac{1}{6} + 5^2.\frac{1}{6} + 6^2.\frac{1}{6} = \frac{91}{6} \cong 15{,}2$$

$$\underline{\underline{DX}} = EX^2 - (EX)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{546}{36} - \frac{441}{36} = \underline{\underline{\frac{105}{36} \cong 2{,}9}}$$

c) $\underline{\underline{\sigma_x}} = \sqrt{DX} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{105}}{6} \cong 1{,}7}}$

d) $x_{0,5}$=?

$F(x_i) = 0{,}5 \Leftrightarrow x_i \in (3;4\rangle$

$\underline{\underline{x_{0,5}}} = \sup\{(3;4\rangle\} = \underline{\underline{4}}$ (ověření: platí, že 50% hodnot náhodné veličiny je ≤ 4)

e) modus je hodnota, pro kterou platí: $P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i), \quad i = 1,2,\ldots$
(tj. hodnota, které nabývá NV s největší pravděpodobností)

*Protože v našem případě nabývá NV X všech hodnot se stejnou pravděpodobností, jedná se o **vícemodální rozdělení** s mody {1;2;3;4;5;6}.*

Číselné charakteristiky spojité náhodné veličiny

4.5. A nyní najdeme vybrané číselné charakteristiky pro spojitou náhodnou veličinu. Zvolme si náhodnou veličinu Y definovanou takto:

$$f(y) = \begin{matrix} c(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & jinde \end{matrix}$$

Určete:

a) střední hodnotu

b) rozptyl
c) směrodatnou odchylku
d) medián
e) modus

Řešení:

Nejdříve bychom museli určit konstantu c ze vztahu: $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$

My využijeme toho, že daný problém jsme již výše řešili a můžeme proto přímo převzít výsledek, že c=0,75.

a) $$\underline{\underline{EY}} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} y.f(y)dy = \int_{-\infty}^{-1} y.0dy + \int_{-1}^{1} y.\frac{3}{4}\left(1-y^2\right)dy + \int_{1}^{\infty} y.0dy = 0 + \frac{3}{4}\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{1} + 0 = \underline{\underline{0}}$$

(výsledek byl očekávatelný, protože hustota pravděpodobnosti NV Y je sudá funkce)

b) $$DY = EY^2 - (EY)^2$$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2.f(y)dy = \int_{-\infty}^{-1} y^2.0dy + \int_{-1}^{1} y^2.\frac{3}{4}\left(1-y^2\right)dy + \int_{1}^{\infty} y^2.0dy = 0 + \frac{3}{4}\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{1} + 0 =$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\underline{\underline{DY}} = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{5} - 0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{5} = 0{,}2}}$$

c) $$\underline{\underline{\sigma_y}} = \sqrt{DY} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{5} \cong 0{,}45}}$$

d) $$F(y_{0,5}) = 0{,}5$$

Znovu využijeme toho, že jsme s touto náhodnou veličinou pracovali již dříve a bez opětovného výpočtu použijeme znalosti distribuční funkce F(y).

$$F(y) = \begin{cases} 0 & pro\ y < (-1) \\ \frac{1}{4}\left(-y^3 + 3y + 2\right) & pro\ (-1) \le y \le 1 \\ 1 & pro\ y > 1 \end{cases}$$

Ze vztahu pro distribuční funkci je zřejmé, že medián může být pouze hodnota z intervalu (-1;1):

$$\frac{1}{4}\left(-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} + 2\right) = 0{,}5$$
$$\left(-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} + 2\right) = 2$$
$$-y_{0,5}^3 + 3y_{0,5} = 0$$

$$y_{0,5}\left(-y_{0,5}^2+3\right)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{y_{0,5_1}=0}} \\ y_{0,5_2}=\sqrt{3}\notin(-1;1) \\ y_{0,5_3}=-\sqrt{3}\notin(-1;1) \end{array}$$

e) modus je hodnota, pro kterou platí: $f(\hat{x}) \geq f(x) \quad pro \ -\infty < x < \infty$
(tj. hodnota, v níž hustota pravděpodobnosti nabývá svého maxima)

Pro maximum funkce platí, že první derivace v něm musí být nulová (nebo nedefinována) a druhá derivace v něm musí být záporná.

Je zřejmé, že rovněž modus budeme hledat na intervalu (-1;1):

$$\frac{df(y)}{dy}=0$$

$$\left[\frac{3}{4}\left(1-y^2\right)\right]'=0$$

$$\frac{3}{4}(0-2y)=0$$

$$y=0 \ldots bod \ \ podezřelý \ z \ \max ima$$

Zda se jedná o maximum bychom mohli ověřit z druhé derivace f(y), ale my využijeme opět toho, že jsme s danou NV pracovali a pohledem na graf f(y) si ověříme, že hustota pravděpodobnosti f(y) skutečně nabývá svého maxima v bodě 0.

$$\underline{\underline{\hat{y}=0}}$$

Funkce náhodné veličiny

V mnoha případech, kdy známe rozdělení náhodné veličiny *X*, potřebujeme určit rozdělení náhodné veličiny *Y*, která je funkcí *X*, tzn. $Y = g(X)$.

Je-li funkce ***g*(*x*)** v oboru možných hodnot veličiny *X* **monotónní,** pak existuje inverzní funkce $g^{-1}(y)$, a jde o **vzájemně jednoznačný vztah mezi *X* a *Y*.**

Je-li v takovém případě ***g*(*x*) rostoucí**, pak pro všechna $x_1 < x_2$ je $y_1 < y_2$ a distribuční funkci veličiny *Y* lze psát jako:

$$H(y) = P(Y < y) = P[X < g^{-1}(y)] = F[g^{-1}(y)]$$

Pro **klesající funkci *g*(*x*)**, pak pro všechna $x_1 < x_2$ je $y_1 > y_2$ a distribuční funkci veličiny *Y* lze psát jako:

$$H(y) = P(Y < y) = P[X > g^{-1}(y)] = 1 - F[g^{-1}(y)]$$

Je-li X spojitá náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, přičemž $g^{-1}(y)$ má pro všechna y spojitou derivaci, pak pro rostoucí funkci $g(x)$ dostaneme hustotu pravděpodobnosti $h(y)$ veličiny Y jako:

$$h(y) = \frac{dH(y)}{dy} = f\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dg^{-1}}{dy} = f\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dx}{dy}$$

Podobně pro klesající funkci $h(x)$ dostaneme:

$$h(y) = \frac{dH(y)}{dy} = -f\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dg^{-1}}{dy} = -f\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{dx}{dy}$$

Vzhledem k tomu, že v případě rostoucí funkce $g(x)$ je $\left(\frac{dx}{dy} > 0\right)$, zatímco v případě klesající funkce $g(x)$ je $\left(\frac{dx}{dy} < 0\right)$, lze oba předchozí vztahy spojit do jednoho:

$$h(y) = \frac{dH(y)}{dy} = f\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dg^{-1}}{dy}\right| = f\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

4.6. Nechť náhodná veličina W je definována jako lineární transformace náhodné veličiny Y.

$$f(y) = \begin{matrix} 0{,}75(1-y)(1+y) & -1 < y < 1 \\ 0 & jinde \end{matrix}$$

$$\mathbf{W = 5Y + 6}$$

Nalezněte:
a) distribuční funkci H(w) náhodné veličiny W
b) hustotu pravděpodobnosti h(w) náhodné veličiny W,
c) střední hodnotu EW náhodné veličiny W
d) rozptyl DW náhodné veličiny W.

Řešení:

Stejně jako v předchozích případech využijeme toho, že jsme již s NV Y pracovali (v opačném případě bychom museli nejdříve najít F(y), EY a DY).

$$F(y) = \begin{matrix} 0 & pro\ y < (-1) \\ \frac{1}{4}\left(-y^3 + 3y + 2\right) & pro\ (-1) \le y \le 1 \\ 1 & pro\ y > 1 \end{matrix} \quad , \text{ EY = 0, DY = 0,2}$$

a) $\underline{\underline{H(w)}} = P(W < w) = P(5Y + 6 < w) = P(Y < \frac{w-6}{5}) = \underline{\underline{F(\frac{w-6}{5})}}$

Nyní určíme distribuční funkci H(w) tak, že do předpisu pro distribuční funkci F(y) dosadíme za y výraz $\left(\frac{w-6}{5}\right)$.

$$H(w) = \begin{cases} 0 & pro \left(\frac{w-6}{5}\right) < -1 \\ \frac{1}{4}\left(-\left(\frac{w-6}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{w-6}{5}\right) + 2\right) & pro -1 \leq \left(\frac{w-6}{5}\right) \leq 1 \\ 1 & pro \left(\frac{w-6}{5}\right) > 1 \end{cases}$$

$$H(w) = \begin{cases} 0 & pro\ w < 1 \\ -\frac{1}{500}(w^3 - 18w^2 + 33w - 16) & pro\ 1 \leq w \leq 11 \\ 1 & pro\ w > 11 \end{cases}$$

b) Hustotu pravděpodobnosti určíme jako derivaci distribuční funkce:

$$h(w) = \frac{dH(w)}{dw}$$

$$h(w) = \begin{cases} -\frac{1}{500}(3w^2 - 36w + 33) & pro\ 1 \leq w \leq 11 \\ 0 & pro\ (w < 1) \cup (w > 11) \end{cases}$$

po úpravě:

$$h(w) = \begin{cases} -\frac{3}{500}(w^2 - 12w + 11) & pro\ 1 \leq w \leq 11 \\ 0 & pro\ (w < 1) \cup (w > 11) \end{cases}$$

c) Z vlastností střední hodnoty plyne, že:

$\underline{\underline{EW}} = E(5Y + 6) = 5.EY + 6 = 5.0 + 6 = \underline{\underline{6}}$

d) Z vlastností rozptylu plyne, že:

$\underline{\underline{DW}} = D(5Y + 6) = 5^2.DY = 25.0,2 = \underline{\underline{5}}$

4.7. Nechť náhodná veličina X má spojitou rostoucí distribuční funkci F(x). Najděte distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y = F(X).

Řešení:

Y = F(x)

- F(x) nabývá pro x∈R hodnot z intervalu <0;1> ⇒ náhodná veličina Y nabývá rovněž hodnot z intervalu <0;1> ⇒

$$pro\ y<0 \ldots H(y)=0$$
$$pro\ y>1 \ldots H(y)=1$$

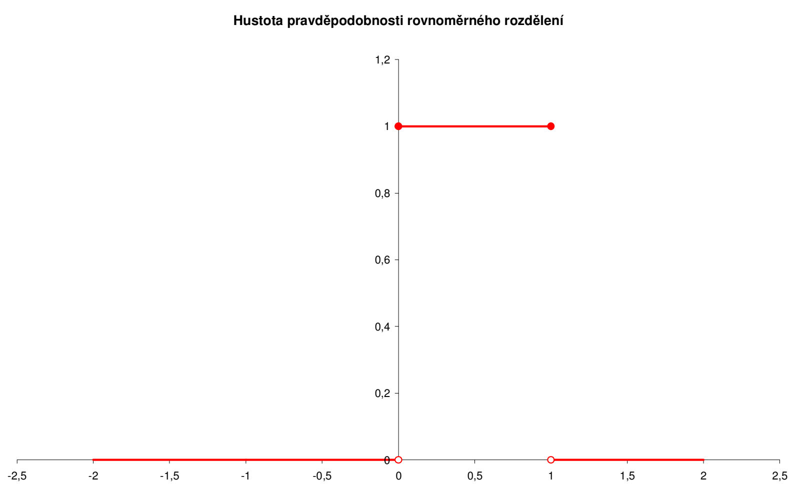
$$pro\ 0 \le y \le 1 \ldots\ H(y)=P(Y<y)=P(F(X)<y)=P(X<F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$$

$$H(y)=\begin{matrix} 0 & pro\ y<0 \\ y & pro\ 0 \le y \le 1 \\ 1 & pro\ y>1 \end{matrix}$$

- Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny *Y*

$$h(y)=\frac{dH(y)}{dy}$$

$$h(y)=\begin{matrix} 1 & pro\ y \in \langle 0;1 \rangle \\ 0 & jinde \end{matrix}$$



Náhodná veličina Y má tzv. **rovnoměrné** (rektangulární) **rozdělení v intervalu <0, 1>** .

4.8. Nechť veličina X má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$. Jaké rozdělení má veličina $Y = tg\ X$? Nalezněte hustotu pravděpodobnosti NV Y.

Řešení:

$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{\pi} & na\ \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle \\ 0 & jinde \end{cases}$$

$$g(x) = y = tg\ x \quad \Rightarrow \quad g^{-1}(y) = x = arctg\ y$$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{d(arctg\ y)}{dy}\right| = \left|\frac{1}{1+y^2}\right| = \frac{1}{1+y^2}$$

Hustota pravděpodobnosti veličiny Y je tedy:

$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}, \qquad y \in R$$

Uvedené **rozdělení** se nazývá **Cauchyho**. Je příkladem rozdělení, které nemá konečný rozptyl:

$$DY = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot\frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\frac{y^2+1-1}{\left(1+y^2\right)}dy = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdot 1dy - \int_{-\infty}^{\infty}\cdot\frac{1}{\left(1+y^2\right)}dy\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}[\infty-\pi] = \infty$$

4.9. Nechť veličina X má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle 0;\pi\rangle$. Jaké rozdělení má veličina $Y = \cot g\ X$? Nalezněte distribuční funkci NV Y.

Řešení:

Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle 0;\pi\rangle$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi-0}=\dfrac{1}{\pi} & na\ \langle 0;\pi\rangle \\ 0 & jinde\end{cases}$$

Distribuční funkce rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle 0;\pi\rangle$:

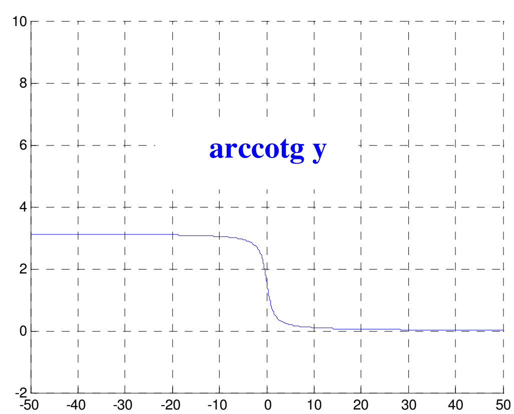
$$F(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty;0) \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{\pi}dt=\frac{1}{\pi}x & x\in\langle 0;\pi\rangle \\ 1 & x\in(\pi;\infty)\end{cases}$$

Distribuční funkce NV Y:

$$H(y)=P(\mathrm{Y}<\mathrm{y})=\mathrm{P}(\mathrm{cotg}\,\mathrm{X}<\mathrm{y})=P(X>\mathrm{arccotg}\,\mathrm{y})=1-F(\mathrm{arccotg}\,\mathrm{y})$$

$$H(y)=\begin{cases}1-0 & arc\cot g\ y\in(-\infty;0) \\ 1-\dfrac{1}{\pi}arc\cot g\ y & arc\cot g\ y\in\langle 0;\pi\rangle \\ 1-1 & arc\cot g\ y\in(\pi;\infty)\end{cases}$$

Vzhledem k tomu, že obor hodnot funkce arccotg x je $(0;\pi)$:



$$H(y)=1-\frac{1}{\pi}arc\cot g\ y \qquad y\in R$$