3 PRAVDĚPODOBNOST

Základní vztahy:

Pravděpodobnost negace jevu A:	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Pravděpodobnost sjednocení jevů A,B:	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- pro disjunktní (neslučitelné) jevy A, B:	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Pravděpodobnost průniku jevů A, B:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$
- pro nezávislé jevy A, B:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
1. de Morganův zákon:	$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$
2. de Morganův zákon:	$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$
Podmíněná pravděpodobnost:	$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Věta o úplné pravděpodobnosti:	$\mathrm{P(A)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A} \mid B_i) \cdot P(B_i)$
Bayesova věta:	$\mathrm{P}(\mathrm{B_k} \mid \mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B_k})\,\mathrm{P}(\mathrm{B_k})}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A} \mid B_i) \cdot P(B_i)}$

3.1 Pravděpodobnost, že selže hasící systém továrny je 20%, pravděpodobnost, že selže poplachové zařízení je 10% a pravděpodobnost, že selžou jak hasící systém, tak i poplachové zařízení jsou 4%. Jaká je pravděpodobnost,že:

a) alespoň jeden systém bude fungovat?

b) budou fungovat oba dva systémy?

Řešení:

Označme si možné jevy takto:

H ... hasící systém funguje

S ... poplachové zařízení (siréna) funguje

Víme, že:

$P(\overline{H}) = 0{,}20$

$P(\overline{S}) = 0{,}10$

$P(\overline{H} \cap \overline{S}) = 0{,}04$

Máme zjistit:

ada) $P(H \cup S)$

K řešení této otázky můžeme přistupovat dvojím způsobem:

Podle definice: Nejde o jevy neslučitelné (mohou nastat zároveň), proto:

$P(H \cup S) = P(H) + P(S) - P(H \cap S)$,

kde by mohlo být problémem určit $P(H \cap S)$

nebo

Přes jev opačný: Kdy na základě de Morganových zákonů můžeme psát, že:

$P(H \cup S) = 1 - P(\overline{H \cup S}) = 1 - P(\overline{H} \cap \overline{S})$,

což můžeme vyčíslit přímo.

$\underline{\underline{P(H \cup S)}} = 1 - 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}96}}$

Pravděpodobnost, že bude fungovat alespoň jeden z ochranných systémů je 96%.

adb) $P(H \cap S)$

Což nemůžeme řešit **prostřednictvím definičního vztahu:**

$(P(H \cap S) = P(H|S) \cdot P(S) = P(S|H) \cdot P(H))$,

neboť nemáme informace o závislosti poruch jednotlivých ochranných systémů. Proto zkusíme znovu postupovat **přes jev opačný**:

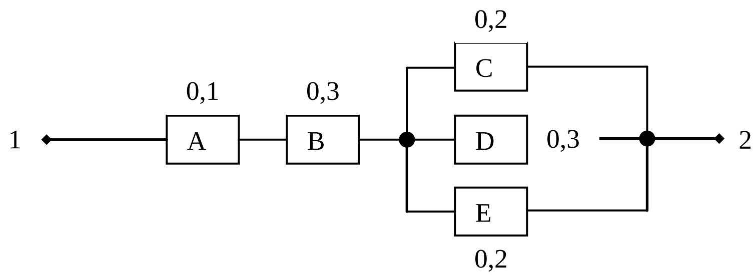
$P(H \cap S) = 1 - P(\overline{H \cap S}) = 1 - P(\overline{H} \cup \overline{S}) = 1 - [P(\overline{H}) + P(\overline{S}) - P(\overline{H} \cap \overline{S})]$,

což můžeme přímo vyčíslit:

$\underline{\underline{P(H \cap S)}} = 1 - [P(\overline{H}) + P(\overline{S}) - P(\overline{H} \cap \overline{S})] = 1 - [0{,}20 + 0{,}10 - 0{,}04] = \underline{\underline{0{,}74}}$

Pravděpodobnost, že oba dva ochranné systémy budou fungovat je 74%.

3.2 Spočtěte pravděpodobnost toho, že z bodu 1 do bodu 2 bude protékat elektrický proud, je-li el. obvod včetně pravděpodobnosti poruch jednotlivých součástek vyznačen na následujícím obrázku. (Poruchy jednotlivých součástek jsou na sobě nezávislé.)



Řešení:

Označme si:

A	...	součástka A funguje,	C	...	součástka C funguje,
B	...	součástka B funguje,	D	...	součástka D funguje
			E	...	součástka E funguje,

Pak:

$P(\overline{A}) = 0{,}1 \Rightarrow P(A) = 0{,}9$

$P(\overline{B}) = 0{,}3 \Rightarrow P(B) = 0{,}7$

$P(\overline{C}) = 0{,}2 \Rightarrow P(C) = 0{,}8$

$P(\overline{D}) = 0{,}3 \Rightarrow P(D) = 0{,}7$

$P(\overline{E}) = 0{,}2 \Rightarrow P(E) = 0{,}8$

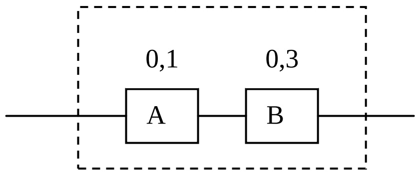
Pro zjednodušení si obvod představíme jako sériové zapojení dvou bloků. Blok 1 je tvořen sériovým zapojením součástek A a B, Blok 2 je tvořen paralelním zapojením součástek C, D a E. V první fázi si určíme pravděpodobnosti poruch jednotlivých bloků:

Blok 1:

B1 ... Blok 1 funguje

Máme-li **sériově zapojené součástky**, je vhodné určovat přímo pravděpododobnost, že systém (blok) funguje.

Blok 1 funguje právě tehdy, jsou-li funkční součástky A i B. Vzhledem k nezávislosti poruch jednotlivých součástek můžeme říci, že:



Blok 1

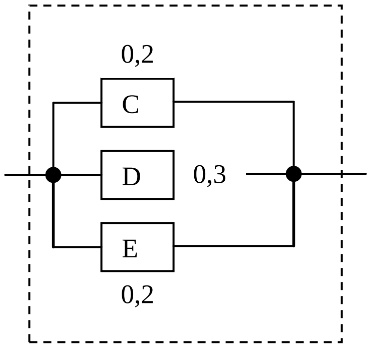
$$P(B1) = P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}9.0{,}7 = 0{,}63$$

Blok 2:

B2 … Blok 2 funguje

Máme-li **paralelně zapojené součástky**, je vhodné pravděpodobnost toho, že systém (blok) funguje určovat jako doplněk pravděpodobnosti jevu opačného – tj. toho, že systém (blok) nefunguje.

Blok 2 nefunguje právě tehdy, není-li funkční ani jedna ze součástek C, D, E. Vzhledem k nezávislosti poruch jednotlivých součástek můžeme říci, že:

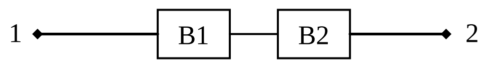


Blok 2

$$P(\overline{B2}) = P(\overline{C} \cap \overline{D} \cap \overline{E}) = P(\overline{C}).P(\overline{D}).P(\overline{E}) = 0{,}2.0{,}3.0{,}2 = 0{,}012$$

$$P(B2) = 1 - P(\overline{B2}) = 1 - 0{,}012 = 0{,}988$$

Celý systém je při tomto značení dán sériovým zapojením Bloku 1 a Bloku 2. Zbývá nám tedy již jen určit spolehlivost celého systému (pravděpodobnost, že systém bude funkční).



S … systém je funkční

$$\underline{\underline{P(S)}} = P(B1 \cap B2) = P(B1) \cdot P(B2) = 0{,}63 \cdot 0{,}988 \cong \underline{\underline{0{,}62}}$$

Pravděpodobnost toho, že z bodu 1 do bodu 2 bude protékat elektrický proud je asi 62%.

Geometrická pravděpodobnost

používáme ji v případech, které lze převést na toto schéma:

V rovině (případně na přímce nebo v prostoru) je dána určitá oblast Ω a v ní další uzavřená oblast *A*. Pravděpodobnost jevu *A*, který spočívá v tom, že náhodně zvolený bod v oblasti Ω leží i v oblasti *A* je:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|A|$, $|\Omega|$ jsou míry oblastí *A* a Ω

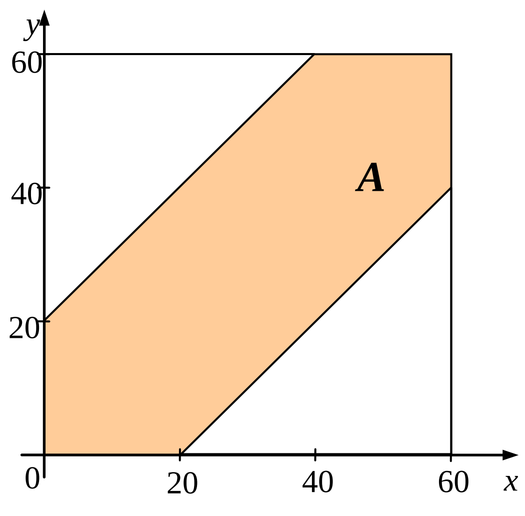
3.3 Jak je pravděpodobné, že meteorit padne na pevninu, víme-li, že pevnina má rozlohu 149 milionů km^2 a moře 361 milionů km^2.

Řešení:

$$P(A) = \frac{149}{149 + 361} = 0{,}292$$

3.4 Dva známí se domluví, že se sejdou na určitém místě mezi 15. a 16. hodinou, přičemž doba čekání je 20 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se při této dohodě setkají?

Řešení:



x . . . doba po 15.hodině v níž přijde první, $x \in \langle 0, 60 \rangle$

y . . . doba po 15.hodině v níž přijde druhý, $y \in \langle 0; 60 \rangle$

jev *A* . . . oblast vymezená čtvercem a nerovnicí $|x - y| \leq 20$

$|\Omega| = 60.60 = 3600$

Když spojíme dva nevyšrafované trojúhelníky, tak dostaneme čtverec o straně délky 40, tedy:

Takže:

$$|A| = 3600 - 40.40 = 2000$$

$$P(A) = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9} = 0,56$$

Podmíněná pravděpodobnost: $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

3.5 Neprůhledný pytlík obsahuje 10 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus – vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Určete pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhneme bílou kuličku.

Řešení:

Jev	Definice jevu
B1	při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C1	při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička
B2	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C2	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička

Stav pytlíku před první realizací pokusu:

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{10\text{ ks}}\ \underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ}_{5\text{ ks}}$$

Pravděpodobnost, že při první realizaci pokusu vytáhnu bílou (černou) kuličku je zřejmě:

$P(B1) = \frac{5}{15}$, resp. $P(C1) = \frac{10}{15}$

Je taktéž zřejmé, že stav pytlíku před druhou realizací pokusu závisí na výsledku první realizace.

Stav pytlíku před druhou realizací pokusu, byla-li při prvním pokusu vytažena bílá kulička:

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{10\text{ ks}}\ \underbrace{\circ\circ\circ\circ}_{4\text{ ks}}$$

Stav pytlíku před druhou realizací pokusu, byla-li při prvním pokusu vytažena černá kulička:

$$\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}_{9\text{ ks}}\ \underbrace{\circ\circ\circ\circ\circ}_{5\text{ ks}}$$

Z obrázku (a z logického úsudku) vidíme, že výsledek druhé realizace pokusu **závisí** na výsledku první realizace pokusu, jinými slovy: výsledek druhé realizace pokusu **je podmíněn** výsledkem první realizace pokusu.

Můžeme tedy určit pravděpodobnosti následujících jevů:

Jev	Definice jevu
B2/B1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C2/B1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
B2/C1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička
C2/C1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička

Na základě obrázku odpovídajících stavu pytlíku před druhou realizaci pokusu při splnění příslušných podmínek (za lomítkem) můžeme určit:

$$P(B2/B1)=\frac{4}{14},\quad P(C2/B1)=\frac{10}{14},\quad P(B2/C1)=\frac{5}{14},\quad P(C2/C1)=\frac{9}{14}$$

Pozn.: *Všimněte si, že:* $P(\overline{A/B})=P(\overline{A}/B)$

Chceme-li tedy určit například pravděpodobnost toho, že v druhém tahu vytáhneme bílou kuličku, musíme vzít v úvahu, že k tomuto jevu může dojít ve dvou případech:

$(B2\cap B1)$ nebo $(B2\cap C1)$

Proto platí: $P(B2)=P((B2\cap B1)\cup(B2\cap C1))$

Jelikož jevy $(B2\cap B1)$ a $(B2\cap C1)$ jsou neslučitelné (nemohou nastat zároveň), platí:

$$P(B2)=P(B2\cap B1)+P(B2\cap C1),$$

$$\underline{\underline{P(B2)}}=P(B2/B1)\cdot P(B1)+P(B2/C1)\cdot P(C1)=\frac{4}{14}\cdot\frac{5}{15}+\frac{5}{14}\cdot\frac{10}{15}=\frac{14}{42}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Obdobně můžeme určit pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhneme černou kuličku.

3.6 120 studentů absolvovalo zkoušky z matematiky a z fyziky. 30 z nich nesložilo obě zkoušky, 8 nesložilo pouze zkoušku z matematiky a 5 nesložilo pouze zkoušku z fyziky. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student:

a) složil zkoušku z matematiky, víme-li že nesložil zkoušku z fyziky

b) složil zkoušku z fyziky, víme-li že nesložil zkoušku z matematiky

c) složil zkoušku z matematiky, víme-li že složil zkoušku z fyziky

Řešení:

Označme si možné jevy takto: M ... složil zkoušku z matematiky
F ... složil zkoušku z fyziky

Víme, že:

$$P(\overline{M} \cap \overline{F}) = \frac{30}{120}$$

$$P(\overline{M} \cap F) = \frac{8}{120}$$

$$P(M \cap \overline{F}) = \frac{5}{120}$$

Máme zjistit:

ada) $P(M|\overline{F})$

což určíme jednoduše podle definice podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(M|\overline{F}) = \frac{P(M \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(M \cap \overline{F})}{P(M \cap \overline{F}) + P(\overline{M} \cap \overline{F})},$$

kde pravděpodobnost, že student nesložil zkoušku z fyziky určujeme podle věty o úplné pravděpodobnosti jako součet pravděpodobnosti, že student nesložil pouze zkoušku z fyziky a pravděpodobnosti, že student nesložil obě zkoušky.
Po vyčíslení tedy víme, že:

$$\underline{\underline{P(M|\overline{F})}} = \frac{P(M \cap \overline{F})}{P(M \cap \overline{F}) + P(\overline{M} \cap \overline{F})} = \frac{\frac{5}{120}}{\frac{5}{120} + \frac{30}{120}} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \cong \underline{\underline{0{,}14}}$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z matematiky, víme-li že nesložil zkoušku z fyziky je asi 14%.

adb) $P(F|\overline{M})$

což určíme obdobně jako při řešení předcházející úlohy:

$$P(F|\overline{M}) = \frac{P(F \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(F \cap \overline{M})}{P(F \cap \overline{M}) + P(\overline{F} \cap \overline{M})},$$

Po vyčíslení tedy víme, že:

$$\underline{\underline{P(F|\overline{M})}} = \frac{P(F \cap \overline{M})}{P(F \cap \overline{M}) + P(\overline{F} \cap \overline{M})} = \frac{\frac{8}{120}}{\frac{8}{120} + \frac{30}{120}} = \frac{8}{38} = \frac{4}{19} \cong \underline{\underline{0{,}21}}$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z fyziky, víme-li že nesložil zkoušku z matematiky je asi 21%.

adc) $P(M|F)$

opět si napíšeme definiční vztah:

$$P(M|F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)},$$

k němuž můžeme přistoupit dvojím způsobem:

Buď se pokusíme tento **vztah upravit** na základě známých vztahů tak, abychom jej mohli prostřednictvím zadaných parametrů vyčíslit:

$$\underline{\underline{P(M|F)}}=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{1-P\left(\overline{M\cap F}\right)}{1-P\left(\overline{F}\right)}=\frac{1-P\left(\overline{M}\cup\overline{F}\right)}{1-\left[P\left(\overline{F}\cap M\right)+P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)\right]}=\frac{1-\left[P\left(\overline{F}\right)+P\left(\overline{M}\right)-P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)\right]}{1-\left[P\left(\overline{F}\cap M\right)+P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)\right]}=$$

$$=\frac{1-\left[\left[P\left(\overline{F}\cap M\right)+P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)\right]+\left[P\left(F\cap\overline{M}\right)+P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)\right]-P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)\right]}{1-\left[P\left(\overline{F}\cap M\right)+P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)\right]}=$$

$$=\frac{1-\left[P\left(\overline{F}\cap M\right)+P\left(F\cap\overline{M}\right)+P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)\right]}{1-\left[P\left(\overline{F}\cap M\right)+P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)\right]}=\frac{1-\left[\frac{5}{120}+\frac{8}{120}+\frac{30}{120}\right]}{1-\left[\frac{5}{120}+\frac{30}{120}\right]}=\frac{\frac{77}{120}}{\frac{85}{120}}=\frac{77}{85}\cong\underline{\underline{0{,}91}}$$

nebo se pokusíme **potřebné pravděpodobnosti vyčíst ze zadání**:

Zadané údaje si zapíšeme do tabulky:

	Složili zkoušku z matematiky	**Nesložili zkoušku z matematiky**	**Celkem**
Složili zkoušku z fyziky		8	
Nesložili zkoušku z fyziky	5	30	35
Celkem		38	**120**

a zbylé údaje v tabulce jednoduše dopočítáme:

Kolik studentů složilo zkoušku z fyziky? To je celkový počet (120) mínus počet studentů, kteří zkoušku z fyziky nesložili (35), což je 85. Obdobně určíme počet studentů, kteří složili zkoušku z matematiky, což je 120 – 38 = 82. A konečně počet těch, kteří složili obě zkoušky určíme např. jako počet těch, kteří složili zkoušku z matematiky (82) mínus počet těch, kteří složili pouze zkoušku z matematiky (5), což je 77.

	Složili zkoušku z matematiky	**Nesložili zkoušku z matematiky**	**Celkem**
Složili zkoušku z fyziky	77	8	85
Nesložili zkoušku z fyziky	5	30	35
Celkem	82	38	**120**

Hledané pravděpodobnosti tedy jsou:

$P(M \cap F) = \frac{77}{120}$; $P(F) = \frac{85}{120}$,

z čehož plyne:

$$\underline{\underline{P(M|F)}} = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{77}{120}}{\frac{85}{120}} = \frac{77}{85} \cong \underline{\underline{0{,}91}}$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z matematiky, víme-li že složil zkoušku z fyziky je asi 91%.
Pozn.: Podle údajů v tabulce bychom mohli řešit i úkoly a) a b).

3.7 Z výrobků určitého druhu dosahuje 95% předepsanou kvalitu. V určitém závodě, který vyrábí 80% celkové produkce, však předepsanou kvalitu má 98% výrobků. Mějme náhodně vybraný výrobek předepsané kvality. Jaká je pravděpodobnost, že byl vyroben ve výše uvedeném závodě?

Řešení:

jev *A*...výrobek je vyroben ve zmiňovaném závodě
jev *B*...výrobek je předepsané kvality

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}8.0{,}98}{0{,}95} = 0{,}825$$

Opakované závislé pokusy

Nechť je dán soubor *N* prvků, z nichž *M* má určitou vlastnost a (*N* - *M*) nikoliv. Vybereme postupně *n* prvků, z nichž **žádný nevracíme**. Pravděpodobnost, že mezi *n* vybranými bude *k* takových, že mají sledovanou vlastnost, vypočteme podle vzorce:

$$P(k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}; \quad \text{pro}\max(\text{n - N} + \text{m};0) \le \text{k} \le \min(\text{M};\text{n})$$

3.8 Mezi 200 vajíčky určenými pro prodej v jisté maloobchodní prodejně je 50 vajíček prasklých. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li si náhodně 20 vajec, bude 8 z nich prasklých?

Řešení:

Jde o výběr bez vracení (vybrané vajíčko nevracíme zpět), jednotlivé pokusy jsou závislé – v tomto případě mluvíme o opakovaných závislých pokusech.

Hledanou pravděpodobnost určíme z klasické definice pravděpodobnosti:

Počet všech možností: vybíráme 20 vajec z 200 vajec (bez ohledu na pořadí)

$$C_{20}(200)=\binom{200}{20}$$

Počet příznivých možností: mezi vybranými 20-ti vejci má být 8 prasklých, tj. vybíráme 8 prasklých vajec z 50-ti prasklých a zároveň 12 (20-8) dobrých vajec ze 150-ti :

$$C_8(50)\cdot C_{12}(150)=\binom{50}{8}\binom{150}{12}$$

A proto:

$$\underline{\underline{P(X=8)}}=\frac{\binom{50}{8}\cdot\binom{150}{12}}{\binom{200}{20}}=\underline{\underline{0{,}057=5{,}7\%}}$$

Pravděpodobnost, že mezi 20-ti vybranými vejci bude 8 prasklých je 0,057.

Věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta

Věta o úplné pravděpodobnosti: $$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}|B_i)\cdot P(B_i)$$

Bayesova věta: $$\mathrm{P}(\mathrm{B_k}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B_k})\,\mathrm{P}(\mathrm{B_k})}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{A}|B_i)\cdot P(B_i)}$$

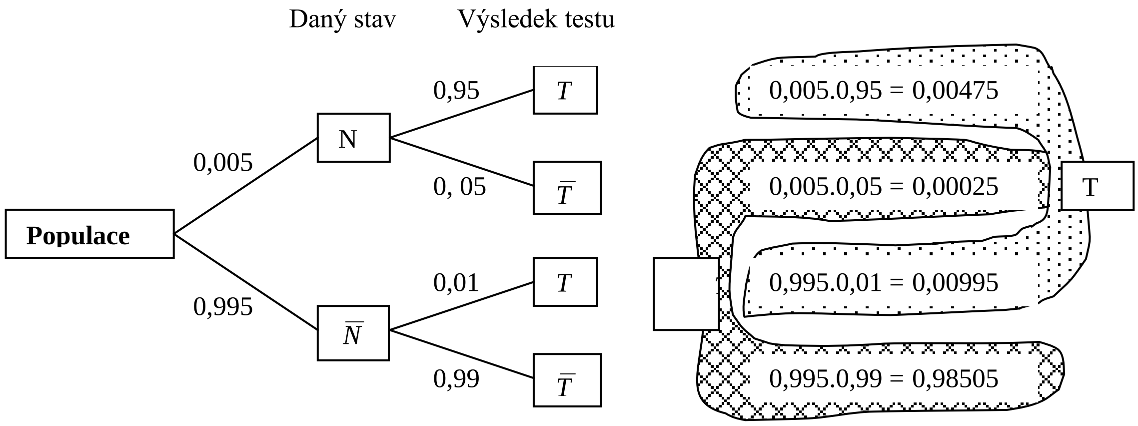
3.9 Laboratoř, která provádí rozbory krve, potvrdí s pravděpodobností 95% existencí protilátek na virus určité nemoci, jestliže jí pacient skutečně trpí. Zároveň test určí jako pozitivní 1% osob, které však touto nemocí netrpí. Jestliže 0,5% populace trpí zmíněnou nemocí, jaká je pravděpodobnost, že určitá osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má?

Řešení:

Takovéto problémy směřují k řešení pomocí věty o úplné pravděpodobnosti, popř. pomocí Bayesova teorému. Pro přehledný zápis situace často využíváme tzv. **rozhodovací strom**.

Označme si: N ... pacient trpí nemocí
T ... test na protilátky vyšel pozitivní

Rozhodovací strom pak vypadá takto:



Na spojnice prvního větvení zapisujeme pravděpodobnosti výskytu daného stavu, tj. P(N) a $P(\overline{N})$, přičemž součet pravděpodobností v jednom větvení dává vždy 1 (100%). V našem případě tedy P(N) známe ze zadání a $P(\overline{N})$ určíme jako 1 – P(N).

Na spojnice druhého větvení se pak zapisují podmíněné pravděpodobnosti – "výsledek testu" za předpokladu "daný stav". V našem případě jsou to pravděpodobnosti: $P(T|N), P(\overline{T}|N), P(T|\overline{N}), P(\overline{T}|\overline{N})$. Opět platí, že součet pravděpodobností v jednom větvení dává vždy 1. Ze zadání známe $P(T|N)\ a\ P(T|\overline{N})$ a zbylé dvě podmíněné pravděpodobnosti dopočítáme jako doplňky do 1.
Chceme-li určit, jaká je pravděpodobnost toho, že nastal "daný stav" a zároveň "výsledek testu", stačí vynásobit hodnoty uvedené u příslušné větve. Např.: pravděpodobnost toho, že pacient trpí nemocí a zároveň mu vyšel negativní test je 0,00025 ($P(N \cap \overline{T}) = P(N) \cdot P(\overline{T}|N) = 0{,}005 \cdot 0{,}05 = 0{,}00025$). Příslušné pravděpodobnosti jsou uvedeny ve sloupci vedle rozhodovacího stromu.

Pravděpodobnosti toho, že dojde k určitému výsledku testu, se určují prostřednictvím věty o úplné pravděpodobnosti. My je okamžitě vyčteme ze sloupce uvedeného vedle rozhodovacího stromu. Např.: $P(T) = P(N \cap T) + P(\overline{N} \cap T) = 0{,}00475 + 0{,}00995 = 0{,}0147$.

A nyní již přejděme k naší otázce: Měli jsme určit **jaká je pravděpodobnost, že určitá osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má** – neboli: $P(N|T)$

Tuto podmíněnou pravděpodobnost z rozhodovacího stromu přímo nevyčteme, pro její určení použijeme Bayesův teorém:

$$P(N|T) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)},$$

do nějž již stačí pouze dosadit hodnoty vyčtené z rozhodovacího stromu:

$$\underline{\underline{P(N|T)}} = \frac{P(N \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}00475}{0{,}00475 + 0{,}00995} = \frac{0{,}00475}{0{,}0147} = \underline{\underline{0{,}323}}$$

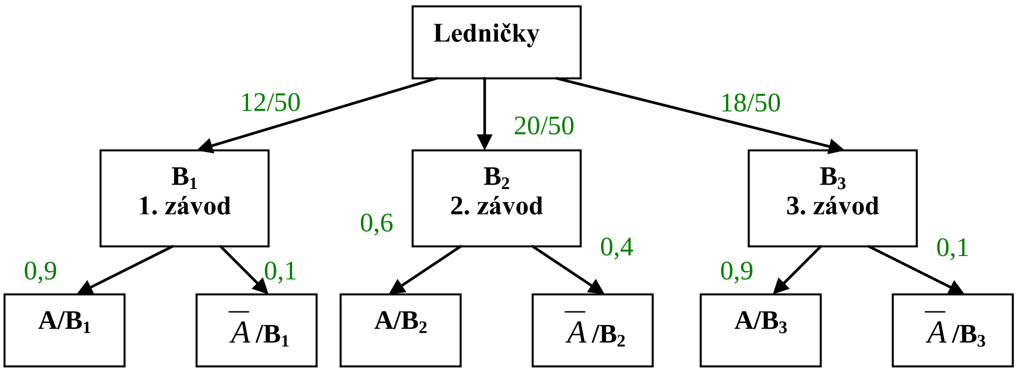
Pravděpodobnost toho, že osoba jejíž test vyšel pozitivní, skutečně onu nemoc má je asi 32,3%. (Zamyslete se nad tím, co by znamenalo, kdyby lékař pouze na základě jednoho pozitivního výsledku testu, označil člověka za nemocného (např. AIDS)).

3.10 Restaurace zakoupila 12 chladniček z 1. závodu, 20 z 2. závodu a 18 z 3. závodu. Pravděpodobnost, že chladnička je výborné jakosti, pochází-li z 1.závodu je 0,9, z 2.závodu 0,6 a z 3.závodu 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti?

Řešení:

jev A...náhodně vybraná chladnička bude výborné jakosti
jev B_i... náhodně vybraná chladnička pochází z i-tého závodu

Chladniček je dohromady 50.



$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup(A\cap B_3)$

<u>Věta o úplné pravděpodobnosti:</u>

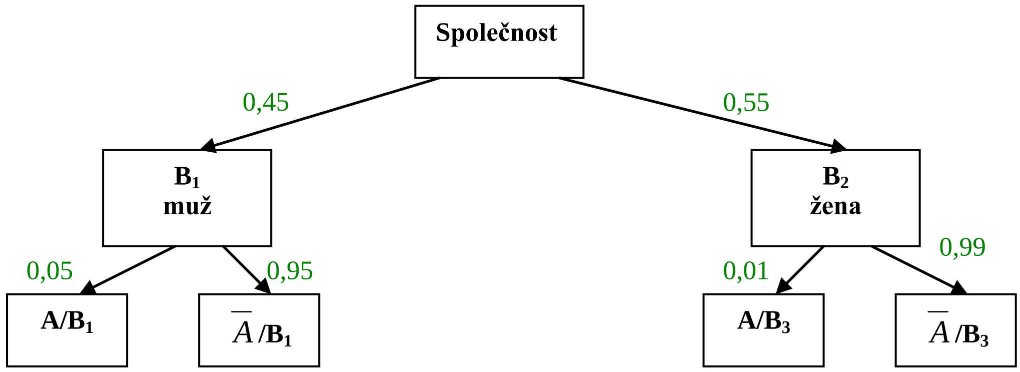
$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+P(A\cap B_3)$

$P(A) = P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + P(B_3).P(A/B_3)$

$P(A)=\frac{12}{50}.0,9+\frac{20}{50}.0,6+\frac{18}{50}.0,9=0,78$

3.11 Ve společnosti je 45% mužů a 55% žen. Vysokých nad 190 cm je 5 % mužů a 1 % žen. Náhodně vybraná osoba je vyšší než 190 cm. Jaká je pravděpodobnost, že je to žena?

jev A...vybraný člověk je vyšší než 190 cm
jev B_1...vybraný člověk je muž
jev B_2...vybraný člověk je žena



Věta o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = 0,45.0,05 + 0,55.0,01 = 0,028$$

Bayesova věta:

$$P(B_2 / A) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{0,55.0,01}{0,028} = 0,196$$

3.12 Student jde na zkoušku, ale neví, který ze tří možných předmětů (STA,LA,MA) se zkouší. Ví, že neumí 40% otázek ze STA, 15% z LA a 20% z MA.

a) Jaká je pravděpodobnost, že bude od zkoušky vyhozen?

b) Jaká je pravděpodobnost, že bude vyhozen z STA?

c) Bude-li vyhozen, jaká je pravděpodobnost toho, že to bude ze STA?

Řešení:

Pravděpodobnosti konání zkoušky z jednotlivých předmětů jsou si rovny.

$$P(STA) = P(LA) = P(MA) = \frac{1}{3}$$

Podmíněné pravděpodobnosti vyhození od zkoušky jsou:

$$P(V|\,STA) = 0,40 \qquad P(V|\,LA) = 0,15 \qquad P(V|\,MA) = 0,20$$

ada) Ze vztahu pro úplnou pravděpodobnost určíme pravděpodobnost vyhození:

$$\underline{\underline{P(V)}} = P(V|\,STA)\cdot P(STA) + P(V|\,LA)\cdot P(LA) + P(V|\,MA)\cdot P(MA) =$$

$$= 0{,}40\cdot\frac{1}{3} + 0{,}15\cdot\frac{1}{3} + 0{,}20\cdot\frac{1}{3} = \underline{\underline{0{,}25}}$$

adb) Pravděpodobnost, že bude vyhozen ze STA:

$$\underline{\underline{P(V\cap STA)}} = P(V|STA)\cdot P(STA) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} = \underline{\underline{0{,}133}}$$

adc) Z <u>Bayesovy věty</u> plyne:

$$\underline{\underline{P(STA|V)}} = \frac{P(V\cap STA)}{P(V)} = \frac{0{,}133}{0{,}25} = \underline{\underline{0{,}532}}$$

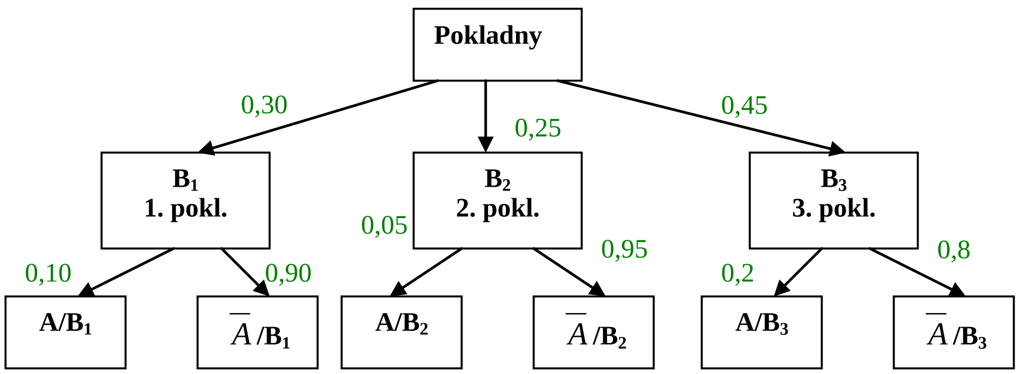
3.13 V obchodě jsou tři pokladny na nichž dojde k chybě v účtování s pravděpodobností: 0,1; 0,05 a 0,2, přičemž z hlediska umístění pokladen v obchodě jsou pravděpodobnosti odbavení pokladnami 0,3; 0,25 a 0,45.

a) Jaká je pravděpodobnost, že osoba opouštějící obchod má chybný účet?

b) Jaká je pravděpodobnost, že jsme byli u druhé pokladny, máme-li chybný účet?

Řešení:

jev A: došlo k chybě v účtování
jev B_i: odbavení i-tou pokladnou



ada) <u>Věta o úplné pravděpodobnosti:</u>

$$P(A) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + P(A\cap B_3)$$

$P(A) = P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + P(B_3).P(A/B_3)$

$$\underline{\underline{P(A)}} = 0{,}30 \cdot 0{,}10 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}45 \cdot 0{,}20 = 0{,}1325 \cong \underline{\underline{0{,}133}}$$

adb) Bayesova věta:

$$\underline{\underline{P(B_2|A)}} = \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{P(B_2) \cdot P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}1325} = \underline{\underline{0{,}094}}$$

DALŠÍ NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY:

Geometrická pravděpodobnost:

1. Na zastávku místní dopravy přijíždí autobus každých 7 minut a zdrží se 0,5 minuty. Jaká je pravděpodobnost, že příjdu a zastihnu autobus na zastávce?

   [0,07]

2. Autobus přijíždí na zastávku každé 4 minuty, tramvaj (má zastávku vedle) každých 6 minut. Určete pravděpodobnost, že se cestující dočká:
   a) autobusu před tramvají
   b) autobusu nebo tramvaje v průběhu 2 minut

   [0,66; 0,66]

3. Pacient se léčí doma a od 7 do 20 hod. je možné jej kontrolovat. Vycházky má od 13 do 15 hod. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 7. a 20. hodinou bude doma k zastižení?

   [0,846]

4. Hodiny, které nebyly ve stanovenou dobu nataženy, se po určitém čase zastaví. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví mezi 6 a 9?

   [0,25]

5. Tyč délky 10m je náhodně rozlomena na 2 části. Jaká je pravděpodobnost, že menší část bude delší než 4m?

   [0,2]