1 KOMBINATORIKA, KLASICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

Kombinatorické pravidlo o součinu

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Kombinatorické pravidlo o součtu

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Uspořádané výběry	Bez opakování	Variace bez opakování	$V_k(n) = n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
		Permutace bez opakování	$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$
	S opakováním	Variace s opakováním	$V'_k(n) = n^k$
		Permutace s opakováním	$P'_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{P(n)}{P(n_1).P(n_2).\ldots.P(n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.\ldots.n_k!}$
Neuspořádané výběry	Bez opakování	Kombinace bez opakování	$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$
	S opakováním	Kombinace s opakováním	$C'_k(n) = C_k(n+k-1) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!.k!}$

1.1 Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

Řešení:

Jednoduchou úvahou dojdeme k tomu, že na prvním místě se může umístit kdokoliv z 8-mi startujících. Jestliže některý z atletů už doběhl první, druhé místo obsadí někdo ze zbývajících 7-mi závodníků. Jsou-li obsazena první dvě místa, je zřejmé, že pro třetí místo máme 6 možností.
Celkem tedy: $V_3(8) = 8.7.6 = 336$ možností

1.2 Kolik existuje trojciferných čísel, které lze zapsat užitím cifer 1, 2, 3, 4, 5.

Řešení:

Jedná se o příklad na variace s opakováním - záleží na pořadí cifer a cifry se v čísle mohou opakovat:

Na první pozici v čísle se může vyskytovat libovolná cifra z daných pěti - tzn. 5 možností. Vzhledem k tomu, že cifry se v čísle mohou opakovat, dostáváme stejný počet možností i na druhé a třetí pozici. Počet všech možností:

$V_3^*(5) = 5.5.5 = 5^3 = 125$

1.3 Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?

Řešení:

Máme k dispozici dva znaky: • –. Z těchto znaků vytváříme postupně jeden znak, dvojice, trojice, čtveřice a pětice. Záleží na pořadí, znaky se samozřejmě mohou opakovat, jedná se tedy o variace s opakováním, přičemž $n = 2$ a $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$z = V_1^*(2) + V_2^*(2) + V_3^*(2) + V_4^*(2) + V_5^*(2) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 =$$
$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

1.4 Mějme n různých korálků, které budeme navlékat na niť. Její konce pak svážeme, takže vytvoříme kruh (náhrdelník). Kolika způsoby lze korálky do kruhu uspořádat? Tzn. uspořádání, které se liší pouze otočením kruhu nepovažujeme za různé.

Řešení:

Pokud bychom konce niti nesvázali, odpovídal by počet všech možností počtu permutací bez opakování z n prvků, těch je $n!$ Ovšem v kruhu by některá z uspořádání byla shodná. Proveďme tedy následující úvahu. Uvažujme nějaké uspořádání v kruhu a zvolme si libovolný korálek, o kterém prohlásíme, že je první. Ostatní korálky očíslujeme např. ve směru hodinových ručiček. Celé uspořádání teď pootočíme ve směru hodinových ručiček o jeden korálek (první se dostane na místo druhého, druhý na místo třetího, ...), čímž v rámci kruhu dostaneme shodné uspořádání. Takto můžeme s korálky pootočit n krát a vždy dostaneme shodné uspořádání. Všechna tato shodná uspořádání jsou ale započítána do počtu $n!$ (počet uspořádání před svázáním konců niti). Výsledek je tedy:

$$x = \frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

1.5 Kolik různých šesticiferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 2, 3, 3, 3?

Řešení:

Mezi danými šesti číslicemi se některé opakují. Pokud by se číslice neopakovaly, vytvořili bychom 6! čísel. V našem případě se počet čísel zmenší:
Z důvodu, že tam máme dvě dvojky se počet možností sníží dvakrát - jedna možnost 2 2 namísto dvou možností X 2, 2 X (permutace ze dvou prvků) v případě, že by číslice byly různé.
V důsledku tří trojek se počet čísel zmenší šestkrát - jedna možnost 3 3 3 namísto permutace ze tří různých číslic.

Počet všech možností je tedy: $P^*(6) = \dfrac{6!}{2!.3!}$

1.6 Zjistěte, kolik různých pěticiferných čísel lze vytvořit použitím cifer 1, 2, 3, 4, 5 (cifry se v čísle mohou opakovat).

Řešení:

Při řešení této úlohy se často můžeme setkat s následující chybou: řešitel si všimne, že z pětiprvkové množiny máme vytvářet pětice a automaticky se úlohu snaží řešit pomocí permutací. Zde ale dochází ke kolizi, neboť o permutace bez opakování se jednat nemůže (cifry se v čísle mohou opakovat) a permutace s opakováním to být také nemohou (není určeno, kolikrát se který prvek má opakovat).

Zadání úlohy totiž přesně koresponduje s pojmem variace s opakováním, kde $k = n$, takže počet všech možností je:

$$V_5^*(5) = 5^5 = 3125$$

1.7 Zjistěte, kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu $\langle 2,15 \rangle$

Řešení:

Přirozených čísel v tomto intervalu je 14. Kvádr je jednoznačně určen třemi hodnotami (délka, šířka, výška) u nichž nezáleží na pořadí (je jedno, jak je kvádr "natočený"). Hodnoty v trojici se mohou opakovat (i krychle je speciální případ kvádru). Takže se jedná o kombinace s opakováním, $n = 14$, $k = 3$:

$$C_3^*(14) = \binom{14+3-1}{3} = \binom{16}{3} = 560$$

1.8 Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou:

a) pětimístná, sudá
b) pětimístná, končící dvojčíslím 21
c) pětimístná, menší než 30000
d) trojmístná lichá
e) čtyřmístná, větší než 2000
f) dvojmístná nebo trojmístná

Řešení:

ad *a*)

Sudá - to v tomto případě znamená, že končí ciframi 2 nebo 4 (XXXX2, XXXX4) - tzn. dvě možnosti. Na zbývajících čtyřech pozicích permutují zbývající čtyři cifry, takže výsledek:

$a = 2.P(4) = 48$

ad *b*)

Máme číslo XXX21. Tedy na třech pozicích permutují tři cifry:

$b = P(3) = 6$

ad *c*)

Menší než 30000, to jsou čísla začínající ciframi 1 nebo 2, tedy dvě možnosti. Na zbývajících čtyřech pozicích permutují zbývající čtyři cifry:

$c = 2.P(4) = 48$

ad *d*)

Lichá, tedy končí ciframi 1, 3, 5 - tři možnosti. Na zbývajících dvou pozicích se mohou vyskytovat některé ze zbývajících čtyř cifer, přičemž záleží na pořadí - jedná se o variace druhé třídy ze čtyř prvků.

$d = 3.V_2(4) = 36$

ad *e*)

obdobně jako u předchozích:

$e = 4.V_3(4) = 96$

ad *f*)

$f = V_2(5) + V_3(5) = 80$

1.9 Kolik různých státních poznávacích značek OSB XX-XX existuje s aspoň dvěmi trojkami?

Řešení:

Aspoň dvě trojky, to jsou 2, 3 nebo 4 trojky. Začneme nejjednodušší možností:

4 trojky:

Tzn. jediná možnost OSB 33-33, takže $x_4 = 1$

3 trojky:

Existují 4 možnosti, jak seskládat tři trojky na čtyřech pozicích (333X, 33X3, 3X33, X333). Obecně to lze vyjádřit jako počet permutací 4 prvků s opakováním, přičemž trojka se opakuje třikrát:

$$P^*(4) = \frac{4!}{3!} = 4$$

Dále existuje 9 možností (zbývajících devět cifer), které mohou být na čtvrté pozici. Obecně lze vyjádřit např. jako počet variací první třídy z devíti prvků: $V_1(9) = 9$

Takže výsledný počet pro 3 trojky: $x_3 = P^*(4).V_1(9) = 4.9 = 36$

2 trojky:

Existuje opět $P^*(4)$ možností, jak seskládat dvě trojky na čtyři pozice, přičemž tentokrát se trojka opakuje dvakrát a zbývající dvě pozice nerozlišujeme mezi sebou, takže se také dvakrát opakují (33XX, 3X3X, 3XX3, X33X, X3X3, XX33):

$$P^*(4) = \frac{4!}{2!.2!} = 6$$

Na zbývajících dvou pozicích se může střídat zbývajících devět cifer, přičemž v dané dvojici záleží na pořadí cifer a cifry se mohou i opakovat. To se dá vyjádřit jako počet variací druhé třídy z devíti prvků s opakováním:

$V_2^*(9) = 9^2 = 81$

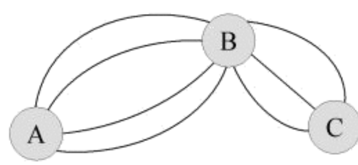
Takže výsledný počet pro 2 trojky: $x_2 = P^*(4).V_2^*(9) = 6.81 = 486$

Tzn., že počet státních poznávacích značek OSB XX-XX s aspoň dvěmi trojkami je:

$x = x_4 + x_3 + x_2 = 1 + 36 + 486 = 523$

1.10 Z místa A do místa B vedou 4 turistické cesty, z místa B do C tři. Určete kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest je právě jedna použita dvakrát.

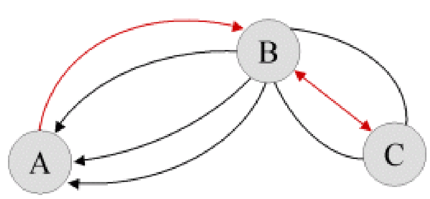
Řešení:



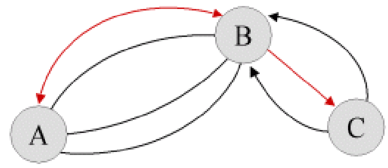
Nejprve určíme, kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C: ke každému ze čtyř způsobů, jak dojít z A do B, existují tři způsoby, jak dojít z B do C. Trasu z A do C lze tedy vybrat 4 · 3, tj. dvanácti způsoby.

Nyní jde o to, kolika způsoby lze vybrat zpáteční trasu z C do A tak, aby v ní byla použita právě jedna cesta z těch, po kterých jsme už šli z A do C. Máme tedy dvě možnosti:

Po stejné cestě se budeme vracet z C do B. Potom z B do A půjdeme jinou cestou, než kterou jsme šli z A do B. V tomto případě lze vybrat zpáteční trasu z C do A třemi způsoby.



Z C do B půjdeme jinou cestou, než kterou jsme přišli, a z B do A půjdeme po stejné cestě, jako z A do B. V tomto případě lze vybrat zpáteční trasu z C do A dvěma způsoby.



Protože obě uvedené možnosti se navzájem vylučují a jiné nejsou, dostáváme (podle kombinatorického pravidla součtu), že celkový počet tras z C do A, které splňují dané podmínky, je roven pěti.

Ke každé z dvanácti tras z A do C existuje tedy pět tras z C do A, které splňují požadovanou podmínku. Pomocí kombinatorického pravidla součinu získáme výsledek úlohy: počet všech způsobů, kterými lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že z daných cest je právě jedna použita dvakrát, je $12 \cdot 5 = 60$.

Podobné úlohy
Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu

a) z A do C a zpět; [$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 =$ **144**]
b) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest není žádná použita dvakrát; [$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 =$ **72**]
c) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest jsou právě dvě použity dvakrát. [$4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 =$ **12**]

Klasická definice pravděpodobnosti

Tato definice se zakládá na objektivní pravděpodobnosti a říká, že:

Pravděpodobnost jevu A je limitním případem relativní četnosti jevu A.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n},$$

kde: **n(A)** … **počet výsledků příznivých jevu A (kolikrát jev A nastal)**
n … **počet všech realizací pokusu**

1.11 S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet:
a) šest
b) menší než 7

Řešení:

ad *a*) Šestka padne v následujících případech:

1.kostka	1	2	3	4	5
2. kostka	5	4	3	2	1

Tzn. 5 možností, $m = 5$

Počet všech možností: $n = \binom{6}{1} \cdot \binom{6}{1} = 36$

$$\underline{\underline{P(A)}} = \frac{m}{n} = \frac{5}{36} = \underline{\underline{0{,}13\overline{8}}}$$

ad *b*)

Z předchozího vyplývá, že je 5 možností pro součet šest. Ostatní možnosti:

Součet 5					**Součet 4**				**Součet 3**			**Součet 2**	
1. kostka	1	2	3	4	**1. kostka**	1	2	3	**1. kostka**	1	2	**1. kostka**	1
2. kostka	4	3	2	1	**2. kostka**	3	2	1	**2. kostka**	2	1	**2. kostka**	1

Takže $m = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

$$\underline{\underline{P(B)}} = \frac{m}{n} = \frac{15}{36} = \underline{\underline{0{,}41\overline{6}}}$$

1.12 Máme 230 výrobků mezi nimiž je 20 nekvalitních. Vybereme 15 výrobků, přičemž vybrané výrobky nevracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 15-ti vybranými bude 10 dobrých?

Řešení:

Z 230 výrobků vybíráme 15, přičemž nezáleží na pořadí a výrobky se nemohou opakovat (výrobky nevracíme zpět). Takže počet všech možností: $n = \binom{230}{15}$

Mezi vybranými 15-ti výrobky jich má být 10 kvalitních a 5 nekvalitních. Musíme tedy z 210-ti kvalitních vybrat 10 a současně z 20-ti nekvalitních 5: $m = \binom{210}{10} \cdot \binom{20}{5}$

$$\underline{\underline{P(A)}} = \frac{\binom{210}{10} \cdot \binom{20}{5}}{\binom{230}{15}} = \underline{\underline{0{,}004}}$$

1.13 Na jedné poličce je náhodně rozestaveno deset knih. Určete pravděpodobnost toho, že určité tři knihy jsou postaveny vedle sebe.

Řešení:

Počet možností, jak uspořádat 10 knih odpovídá počtu permutací z 10 prvků: $n = 10!$
$m = 8.3!.7!$ - existuje 8 způsobů umístění dané trojice knih (na pozicích 123, 234, 345, ..., 8910), 3! způsobů jak danou trojici uspořádat a 7! způsobů, jak uspořádat zbývající knihy.

$$\underline{\underline{P(A)}} = \frac{8 \cdot 3! \cdot 7!}{10!} = \underline{\underline{0{,}0\overline{6}}}$$

1.14 Mějme pět vstupenek po 100 Kč, tři vstupenky po 300 Kč a dvě vstupenky po 500 Kč. Vyberme náhodně tři vstupenky. Určete pravděpodobnost toho, že:
a) alespoň dvě z těchto vstupenek mají stejnou hodnotu
b) všechny tři vstupenky stojí dohromady 700 Kč

Řešení:

ad *a*)

Budeme řešit pomocí opačného jevu. Opačný jev k "alespoň dvě mají stejnou hodnotu" je "každá má jinou hodnotu":

$$\underline{\underline{P(A)}} = 1 - \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \underline{\underline{0{,}75}}$$

ad *b*)

Dohromady za 700 Kč, tzn. jedna za 100 Kč a dvě za 300 Kč nebo dvě za 100 Kč a jedna za 500 Kč:

$$\underline{\underline{P(B)}} = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{2}+\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{24} = \underline{\underline{0{,}291\overline{6}}}$$