13 ANOVA

Rozšířením dvouvýběrových testů pro střední hodnoty je **analýza rozptylu** neboli **ANOVA,** která umožňuje srovnávat několik středních hodnot nezávislých náhodných výběrů. Analýza rozptylu ve své parametrické podobě **předpokládá normalitu rozdělní a** tzv. **homoskedasticitu** (identické rozptyly).

Testovou statistikou je při analýze rozptylu **F-poměr** , který byl odvozen na základě analýzy variability vstupních datových souborů. Statistika F-poměr je citlivá na platnost hypotézy H_0, která je formulována jako rovnost středních hodnot zkoumaných náhodných výběrů.

Jednotlivé mezivýsledky, získané v průběhu analýzy rozptylu, jsou průběžně a systematicky zaznamenávány v **tabulce ANOVA.**

Zdroj proměnlivosti	**Součet čtverců**	**Stupně volnosti**	**Průměrný čtverec**	**Testová stat. F-poměr**	**P-value**
Mezitřídní (faktor)	$SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (\overline{X}_i - \overline{X})^2$	$k-1$	$MS_B = \frac{SS_B}{k-1}$		
Vnitřní (reziduální)	$SS_W = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2$	$N-k$	$MS_W = \frac{SS_W}{N-k}$	$F-ratio = \frac{MS_B}{MS_W}$	$1-F(F-ratio)$
Celkový	$SS_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X})^2$	$N-1$			

Druhým krokem při analýze rozptylu je **post hoc** analýza, která spočívá v porovnávání výběrových průměrů všech dvojic populací s cílem vybrat homogenní (srovnatelné) populace. Kritériem pro zařazení do homogenních skupin může být například **LSD-statistika.** Post hoc analýza se provádí pouze v případě zamítnutí H_0. Použijeme-li ji v případě, kdy H_0 nezamítneme, můžeme dostat **falešné výsledky**.

Popsaný postup ANOVA, využívající pro rozhodování F-poměr, je citlivý na předpoklad o normalitě rozdělení původních náhodných výběrů. Pro případy, kdy tomuto předpokladu nelze úplně vyhovět, se používá **Kruskal - Wallisův** pořadový test**.**

Testujeme hypotézu **H_0:** $x_{0,5_I} = x_{0,5_{II}} = \ldots = x_{0,5_{IV}}$

Oproti alternativě **H_A:** neplatí H_0

Výběr	**Pořadí veličin v uspořádaném sdruženém náhodném výběru**				**Součty pořadí**
1	R_{11}	R_{12}	…	R_{1n1}	T_1
2	R_{21}	R_{22}	…	R_{2n2}	T_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	R_{k1}	R_{k2}	…	R_{knk}	T_k

Testová statistika:

$$Q = \frac{12}{N \cdot (N+1)} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N+1) \to \chi^2_{k-1}$$

P-value:

$$p-value = 1 - F(Q)$$

13.1. Následující příklad je ukázkou klinické studie. Dvacet dva pacientů, kteří podstoupili operaci srdce, bylo náhodně rozděleno do tří skupin.

Skupina 1:
Pacienti dostali 50 % oxidu dusného a 50 % kyslíkové směsi nepřetržitě po dobu 24 hodin;
Skupina 2:
Pacienti dostali 50 % oxidu dusného a 50 % kyslíkové směsi pouze během operace;
Skupina 3:
Pacienti nedostali žádný oxid dusný, ale dostali 35-50 % kyslíku po dobu 24 hodin.

Tabulka ukazuje koncentraci soli kyseliny listové v červených krvinkách ve všech třech skupinách po uplynutí 24 hodin ventilace.

Skupina 1	Skupina 2	Skupina 3
276	206	241
280	210	246
275	226	270
291	249	293
347	255	328
354	273	
380	285	
330	295	
	309	

Zjistěte, zda složení a způsob dané medikace má vliv na koncentraci soli kyseliny listové v červených krvinkách po uplynutí 24 hodin ventilace. Pro řešení ve Statgraphicsu použijte soubor Kys_listova.sf3.

Řešení:

„Ruční" řešení si ukážeme pouze pro seznámení s principem ANOVA, budeme **předpokládat**, že jsou splněny předpoklady použití F-testu, tj. normalita všech tří výběrů a homoskedasticita.

Testujeme:

H₀: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

(střední hodnoty koncentrací soli kyseliny listové v červených krvinkách po uplynutí 24 hodin ventilace nezávisí na typu medikace (jsou shodné))

oproti

H$_A$: $\overline{H_0}$

(střední hodnoty koncentrací soli kyseliny listové v červených krvinkách po uplynutí 24 hodin ventilace nezávisí na typu medikace (jsou shodné))

Pro nalezení p-value je třeba vyplnit tabulku ANOVA (tzn. najít F-poměr).

Zdroj proměnlivosti	**Součet čtverců**	**Stupně volnosti**	**Průměrný čtverec**	**Testová stat. F-poměr**	**P-value**
Mezitřídní (způsob medikace)	$SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (\overline{X}_i - \overline{X})^2$	$k-1$	$MS_B = \frac{SS_B}{k-1}$		
Vnitřní (reziduální)	$SS_W = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2$	$N-k$	$MS_W = \frac{SS_W}{N-k}$	$F-ratio = \frac{MS_B}{MS_W}$	$1-F(F-ratio)$
Celkový	$SS_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X})^2$	$N-1$			

	Skupina 1	**Skupina 2**	**Skupina 3**	
	276	206	241	
	280	210	246	
	275	226	270	
	291	249	293	
	347	255	328	
	354	273		
	380	285		
	330	295		
		309		
n_i	8	9	5	
$\overline{X}_i$	316,6	256,4	275,6	$\overline{X} = 282{,}7$
$\left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)$	33,9	-26,2	-7,1	$\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{X}_i - \overline{X}\right) = 0$
$\left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2$	1152,1	688,4	50,2	
$n_i \cdot \left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2$	9217,1	6195,6	250,8	$\sum_{i=1}^{3} n_i \cdot \left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2 = 15663{,}5$
S_i^2	1699,4	1378,0	1288,3	
$(n_i - 1)\, S_i^2$	11895,9	11024,2	5153,2	$\sum_{i=1}^{3} (n_i - 1)\, S_i^2 = 28073{,}3$

$$SS_B = \sum_{i=1}^{3} n_i \cdot \left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2 = 15663{,}5$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)\, S_i^2 = 28073{,}3$$

k=3
N=22

Zdroj proměnlivosti	**Součet čtverců**	**Stupně volnosti**	**Průměrný čtverec**	**Testová stat. F-poměr**	**P-value**
Mezitřídní (způsob medikace)	15.663,5	2	7.831,8		
Vnitřní (reziduální)	28.073,3	19	1.477,5	5,3	$1-F(5{,}3)$
Celkový	43.736,8	21			

V tabulce pro Fisher-Snedecorovo rozdělení (Tab. 4) najdeme pro 2 stupně volnosti pro čitatele a 19 stupňů volnosti pro jmenovatele:

$$0{,}95 < \mathrm{F}(5{,}3) < 0{,}99$$
$$\Rightarrow 0{,}01 < 1 - \mathrm{F}(5{,}3) < 0{,}05$$
$$\Rightarrow 0{,}01 < p - value < 0{,}05$$

Proto zamítáme H_0, tzn. existuje vliv příslušné medikace na koncentrací soli kyseliny listové v červených krvinkách po uplynutí 24 hodin ventilace.

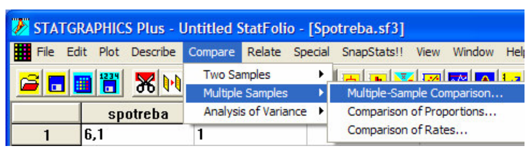
Pokračovat bychom měli post hoc analýzou. Z důvodu pracnosti tuto část analýzy pomineme a ukážeme si přímo zpracování daného problému ve Statgraphicsu.

Řešení ve Statgraphicsu:

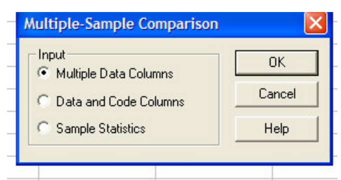
Pro použití F-testu je však třeba ověřit 2 předpoklady:

a) homoskedasticitu
b) zda data z jednotlivých výběrů podléhají normálnímu rozdělení

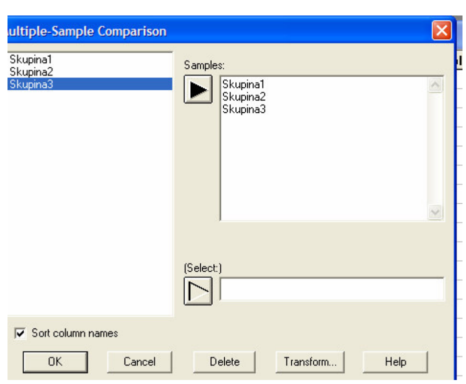
Zvolíme menu **Compare\Multiple Samples\Multiple-Sample Comparison …**



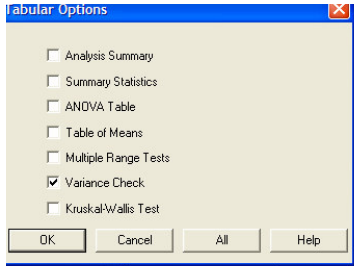
V okně **Multiple-Sample Comparison** zvolíme jako typ vstupního souboru **Multiple Data Columns** (vícevýběrový soubor – více výběrů v jednotlivých sloupcích).



Jako **Samples** (výběry) zadáme "Skupina 1, Skupina 2, Skupina 3.



V tuto chvíli můžeme přistoupit k **testování homoskedasticity**. Klikneme na ikonu **Tabular Options** a v předloženém menu zaškrtneme položku **Variance Check**.

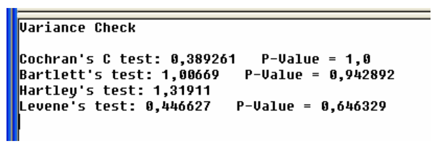


Výstupem procedury je nabídka 4 testů (Cochranův test, Bartlettův test, Hartleyův test a Leveneho test) ověřujících rovnost směrodatných odchylek jednotlivých výběrů. Jde tedy o výstupy testování těchto hypotéz:

H$_0$: $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_k$

H$_A$: $\overline{H_0}$

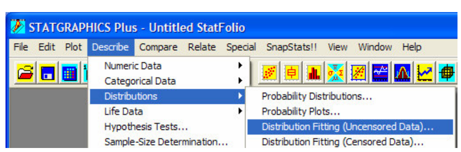
V našem případě je p-value pro všechny 3 testy vyšší než 0,05 a proto nezamítáme homoskedasticitu.



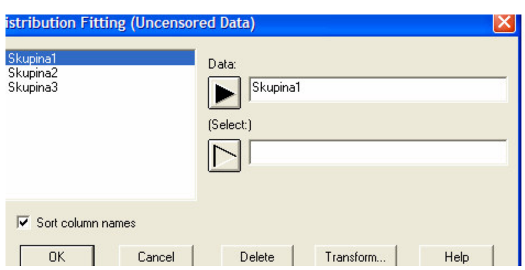
```
Variance Check

Cochran's C test: 0,389261   P-Value = 1,0
Bartlett's test: 1,00669   P-Value = 0,942892
Hartley's test: 1,31911
Levene's test: 0,446627   P-Value = 0,646329
```

Můžeme přistoupit k **testování normality**. Musíme ověřit, zda všechny 3 výběry můžeme považovat za výběry z normálního rozdělení.K testování přistoupíme známým způsobem.

Zvolíme menu **Describe\Distributions\Distribution Fitting (Uncensored Data) …**



V nově otevřeném okně pak jako **Data** zadáme “Skupina 1”.

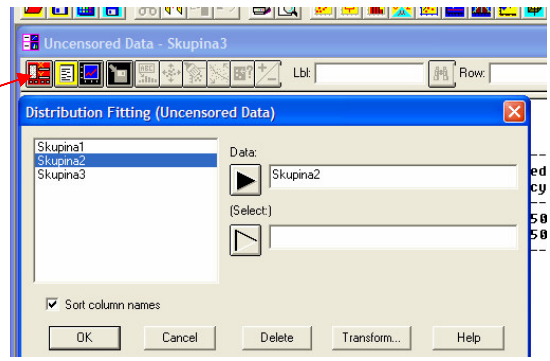


Výstupem procedury je p-value pro Kolmogorovův-Smirnovův test (pro χ^2 test dobré shody máme malý rozsah výběru), které nám říká, že 1. výběr můžeme považovat za výběr podléhající normálnímu rozdělení.

```
Goodness-of-Fit Tests for Skupina1

                              Chi-Square Test
----------------------------------------------------------------------------
              Lower          Upper       Observed      Expected
              Limit          Limit      Frequency     Frequency    Chi-Square
----------------------------------------------------------------------------
         at or below        306,181           4          3,20          0,20
above        306,181                          4          4,80          0,13
----------------------------------------------------------------------------
Insufficient data to conduct Chi-Square test.

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0,232901
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0,156312
Estimated overall statistic DN = 0,232901
Approximate P-Value = 0,778349

EDF Statistic          Value           Modified Form   P-Value
---------------------------------------------------------------------
Kolmogorov-Smirnov D   0,232901        0,726405        >=0.10*
Anderson-Darling A^2   0,455844        0,514605        0,1[illegible]*
---------------------------------------------------------------------
*Indicates that the P-Value has been compared to tables of critical values
specially constructed for fitting the currently selected distribution.
Other P-values are based on general tables and may be very conservative.
```

Test normality zopakujeme pro zbylé dva výběry. Postup můžeme urychlit tím, že využijeme ikonu umožňující změnu vstupních parametrů použité procedury a změníme pouze údaj v poli Data (Skupina 2, Skupina 3).

Ikona umožňující změnu vstupních parametrů procedury



Vzhledem k tomu, že normalita byla pro všechny 3 výběry potvrzena, můžeme přistoupit k ANOVĚ (F-testu).

Testujeme hypotézy, že:

H$_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H$_A$: $\overline{H_0}$

Vrátíme se k výstupu, který jsme použili jako výchozí bod pro testování homoskedasticity (pokud jste si jej smazali, vyhotovte jej znova podle výše uvedeného postupu.)

Automaticky vygenerovaným textovým výstupem je tabulka ANOVA (srovnejte s „ručním“ výpočtem).

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Between groups	15663,5	2	7831,74	5,30	0,0148
Within groups	28073,3	19	1477,54		
Total (Corr.)	43736,8	21			

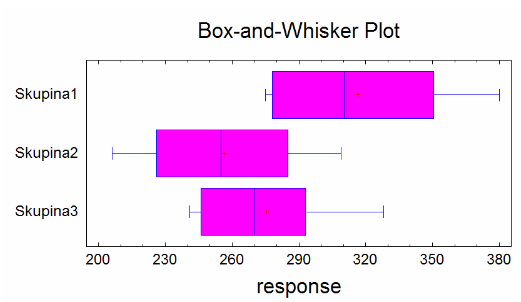
Slovníček:

Analysis of Variance	…	analýza rozptylu (ANOVA)
Source	…	zdroj (měnlivosti)

Between groups	…	mezi třídami
Within groups	…	uvnitř tříd
Sum of Squares	…	součet čtverců
Df (degree of freedom)	…	stupně volnosti
Mean Square	…	průměrný čtverec (zjednodušeně rozptyl)
F-ratio	…	F-poměr
Total	…	celkem

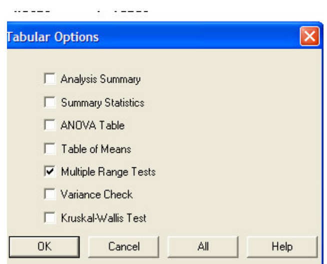
Z hodnoty p-value (0,0148) učiníme závěr, že nulovou hypotézu zamítáme, tzn. že typ medikace ovlivňuje koncentrací soli kyseliny listové v červených krvinkách po uplynutí 24 hodin ventilace.

Tento závěr se dal očekávat na základě grafického výstupu procedury – **vícenásobného krabicového grafu**, na němž je zřejmé, že koncentrace soli kyseliny listové pro Skupinu 1 převyšuje koncentraci soli kyseliny listové pro ostatní skupiny.

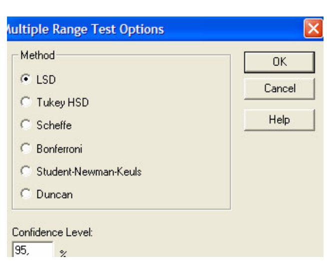


Provedeme tedy post-hoc analýzu, která nám ukáže, zda nelze některé skupiny sloučit do jedné skupiny (z hlediska vlivu na koncentraci soli kyseliny listové).

Klikneme tedy na ikonu **Tabular Options** a zaškrtneme **Multiple Range test** (vícenásobné porovnávání).



Statgraphicsu nám nabízí 6 různých možností vícenásobného porovnávání (LSD, Tukeyho test, Scheffeho test, Bonferroniho test, Student-Newmann- Keulsův test a Duncanův test). Možnost výběrů z těchto testů se objeví, provedeme-li RC pravou myší na textový výstup a zvolíme menu **Pane Options**. My si zvolíme LSD test.



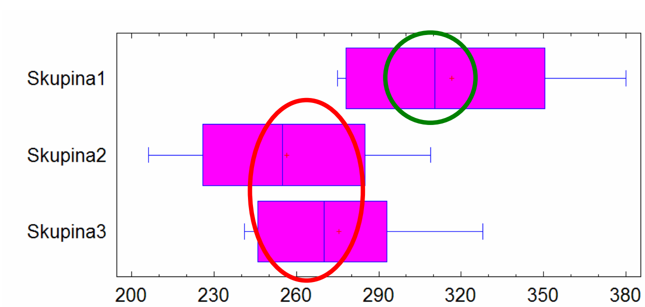
Textovým výstupem této analýzy je tabulka obsahující hodnoty **LSD statistiky** pro každou dvojicí výběrů, **kritické hodnoty LSD statistiky** (přesáhne-li absolutní hodnota LSD statistiky kritickou hodnotu, je rozdíl mezi průměry příslušných výběrů označen za statisticky významný, což je označeno symbolem „*“ u příslušné LSD statistiky.

V horní části textového výstupu najdeme sloupec **Homogenous Groups** (homogenní skupiny), který nám ukazuje, které výběry by se mohly (z hlediska sledovaného faktoru) považovat za výběr z jedné populace (rovnocenné z hlediska vlivu daného faktoru). Tyto podskupiny jsou označeny křížky „X“ pod sebou.

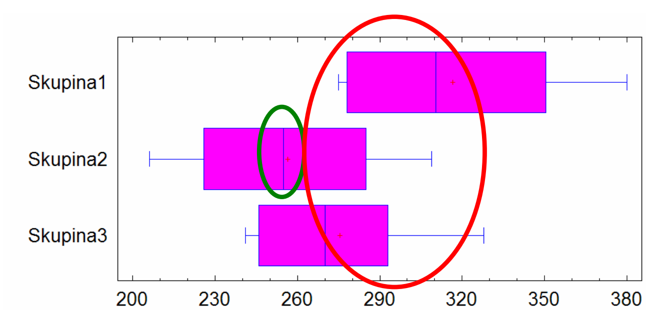
```
Multiple Range Tests

--------------------------------------------------------------------------------
Method: 95,0 percent LSD
               Count     Mean                 Homogeneous Groups
--------------------------------------------------------------------------------
Skupina2       9         256,444              X
Skupina3       5         275,6                XX
Skupina1       8         316,625               X
--------------------------------------------------------------------------------
Contrast                                      Difference           +/-  Limits
--------------------------------------------------------------------------------
Skupina1 - Skupina2                          *60,1806              39,0934
Skupina1 - Skupina3                           41,025               45,8656
Skupina2 - Skupina3                           -19,1556             44,8748
--------------------------------------------------------------------------------
* denotes a statistically significant difference.
```

V tomto případě můžeme učinit dva možné závěry:

a) Skupiny 2 a 3 můžeme považovat za rovnocenné z hlediska vlivu způsobu ventilace na koncentraci soli kyseliny listové v červených krvinkách po 24 hodinách ventilace, u skupiny 1 se objevila ve srovnání se skupinami 2 a 3 vyšší koncentrace.



b) Skupiny 1 a 3 můžeme považovat za rovnocenné z hlediska vlivu způsobu ventilace na koncentraci soli kyseliny listové v červených krvinkách po 24 hodinách ventilace, u skupiny 2 se objevila ve srovnání se skupinami 1 a 3 nižší koncentrace.



13.2. Je třeba zjistit, zda se liší spotřeba automobilu při použití různých druhů benzínu. Zkouší se čtyři typy benzínu, jež se liší chemickým složením. Testovací jízdy se provádějí se 16 auty stejného modelu tak, že vždy čtyři auta použijí stejný benzín. Výsledky měření spotřeby v l/100 km při jednotlivých jízdách jsou uložený v datech Spotreba.sf3. Rozhodněte pomoci testu, zda složení benzínu ovlivňuje jeho spotřebu (α =0,05).

Řešení ve Statgraphicsu:

Pro zjištění toho, zda existuje vliv typu benzínu na spotřebu automobilu by nám mohla posloužit analýza rozptylu.

Pro použití F-testu je však třeba ověřit 2 předpoklady:

a) zda data z jednotlivých výběrů podléhají normálnímu rozdělení
b) homoskedasticitu

Data se nacházejí v tzv. **standardním datovém formátu**, tzn. v jednom sloupci jsou uvedena data, ve druhém sloupci je jejich kód.

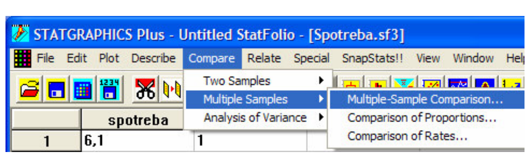
Spotreba.sf3

	spotreba	benzin
1	6,1	1
2	5,95	1
3	6	1
4	6,12	1
5	6,23	2
6	6,1	2
7	6,31	2
8	6,15	2
9	5,96	3
10	6	3
11	5,82	3
12	6,04	3
13	6,08	4
14	5,99	4
15	5,8	4
16	5,91	4

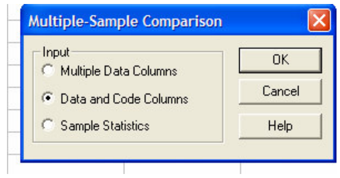
Pro „ruční“ zpracování bychom si data museli převést do níže uvedeného tvaru:

benzin 1	benzin 2	benzin 3	benzin 4
6,1	6,23	5,96	6,08
5,95	6,1	6	5,99
6	6,31	5,82	5,8
6,12	6,15	6,04	5,91

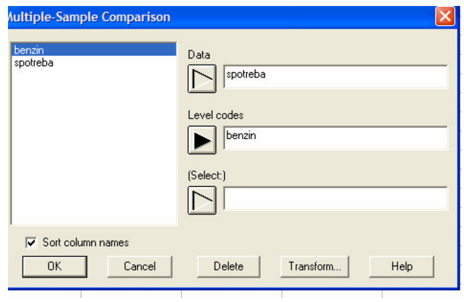
Výhodou Statgraphicsu je to, že nám umožní zpracovávat i data uvedená ve standardním datovém formátu. Naším cílem je porovnat data podle kódu. Zvolíme tedy menu **Compare\Multiple Samples\Multiple-Sample Comparison …**



V okně **Multiple-Sample Comparison** zvolíme jako typ vstupního souboru standardní datový formát (**Data and Code Columns**).



Jako **Data** zadáme “spotreba”, jako identifikátor (**Level codes**) zadáme “benzin”.



V tuto chvíli můžeme přistoupit k **testování homoskedasticity**. Postupujeme obdobně jako v předcházejícím příkladu.

H$_0$: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$

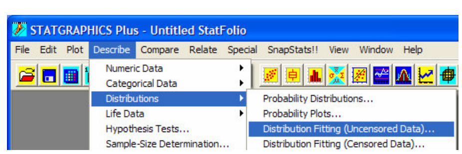
H$_A$: $\overline{H_0}$

```
Variance Check

Cochran's C test: 0,369084   P-Value = 0,901742
Bartlett's test: 1,04056   P-Value = 0,936309
Hartley's test: 2,1601
Levene's test: 0,205734   P-Value = 0,890457


The StatAdvisor
---------------
   The four statistics displayed in this table test the null
hypothesis that the standard deviations within each of the 4 columns
are the same.  Of particular interest are the three P-values.  Since
the smallest of the P-values is greater than or equal to 0,05, there
is not a statistically significant difference amongst the standard
deviations at the 95,0% confidence level.
```

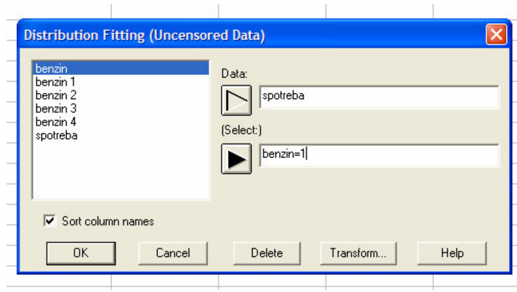
V našem případě je p-value pro všechny 4 testy vyšší než 0,05 a proto nezamítáme homoskedasticitu.

Můžeme přistoupit k **testování normality**. Musíme ověřit, zda všechny 4 výběry můžeme považovat za výběry z normálního rozdělení.K testování přistoupíme známým způsobem.

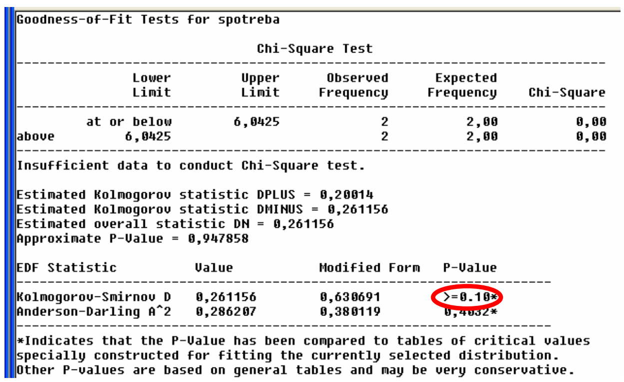
Zvolíme menu **Describe\Distributions\Distribution Fitting (Uncensored Data) …**



V nově otevřeném okně pak jako **Data** zadáme “spotreba” a protože chceme testovat normalitu každého z výběru zvlášť, v poli **Select** (Vyber) zadáme, že máme uvažovat pouze položky vztahující se k benzinu 1 (**benzin=1**).



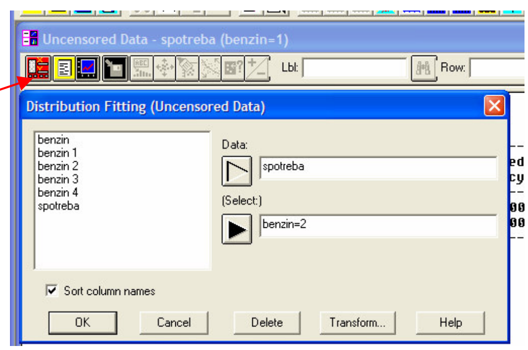
Výstupem procedury je p-value pro Kolmogorovův-Smirnovův test (pro χ^2 test dobré shody máme malý rozsah výběru), které nám říká, že 1. výběr můžeme považovat za výběr podléhající normálnímu rozdělení.



```
Goodness-of-Fit Tests for spotreba

                              Chi-Square Test
----------------------------------------------------------------------------
               Lower          Upper      Observed      Expected
               Limit          Limit     Frequency     Frequency   Chi-Square
----------------------------------------------------------------------------
          at or below        6,0425             2          2,00         0,00
above          6,0425                           2          2,00         0,00
----------------------------------------------------------------------------
Insufficient data to conduct Chi-Square test.

Estimated Kolmogorov statistic DPLUS = 0,20014
Estimated Kolmogorov statistic DMINUS = 0,261156
Estimated overall statistic DN = 0,261156
Approximate P-Value = 0,947858

EDF Statistic           Value           Modified Form   P-Value
---------------------------------------------------------------------
Kolmogorov-Smirnov D    0,261156        0,630691        >=0.10*
Anderson-Darling A^2    0,286207        0,380119        0,4032*
---------------------------------------------------------------------
*Indicates that the P-Value has been compared to tables of critical values
specially constructed for fitting the currently selected distribution.
Other P-values are based on general tables and may be very conservative.
```

Test normality zopakujeme pro zbylé tři výběry. Postup můžeme urychlit tím, že využijeme ikonu umožňující změnu vstupních parametrů použité procedury a změníme pouze údaj v poli Select (benzin=2, benzin=3, benzin=4).

Ikona umožňující změnu vstupních parametrů procedury



Vzhledem k tomu, že normalita byla pro všechny 4 výběry potvrzena, můžeme přistoupit k ANOVĚ (F-testu).
Testujeme hypotézu, že:

H₀: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ (střední hodnoty spotřeby nezávisí na typu benzinu (jsou shodné)),

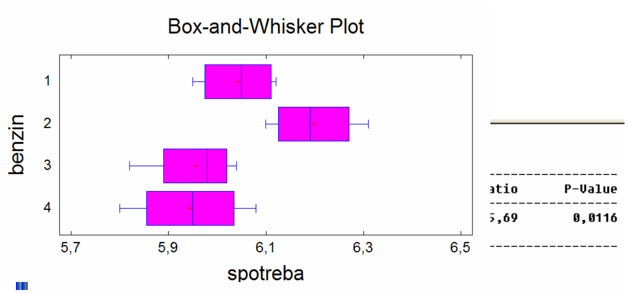
H$_A$: $\overline{H_0}$ (střední hodnoty spotřeby závisí na typu benzinu (jsou různé))

Vrátíme se k výstupu, který jsme použili jako výchozí bod pro testování homoskedasticity (pokud jste si jej smazali, vyhotovte jej znova podle výše uvedeného postupu.)

Automaticky vygenerovaným textovým výstupem je tabulka ANOVA.

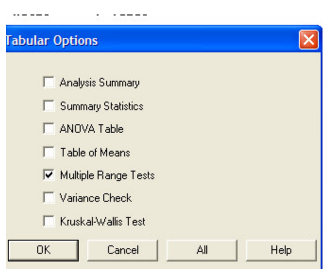
Z hodnoty p-value (0,0116) učiníme závěr, že nulovou hypotézu zamítáme, tzn. že typ benzinu ovlivňuje spotřebu automobilu.

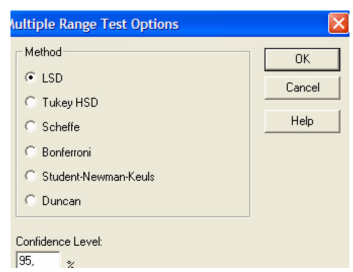
Tento závěr se dal očekávat na základě grafického výstupu procedury – **vícenásobného krabicového grafu**, na němž je zřejmé, že spotřeba pro benzin 2 výrazně převyšuje spotřebu pro jiné typy benzinu.



Obdobně jako v předcházejícím příkladě provedeme post-hoc analýzu, která nám ukáže, zda nelze některé typy benzinu sloučit do jedné skupiny (z hlediska vlivu na spotřebu).

Klikneme tedy na ikonu **Tabular Options** a zaškrtneme **Multiple Range test** (vícenásobné porovnávání), v menu **Pane Options** zvolíme **LSD test**.





V našem případě tedy vidíme, že benziny 1, 3, 4 tvoří jednu skupinu (spotřeba pro tyto benziny je na stejné úrovni), druhou skupinu zastupuje benzin 2, jemuž příslušná spotřeba je výrazně vyšší.

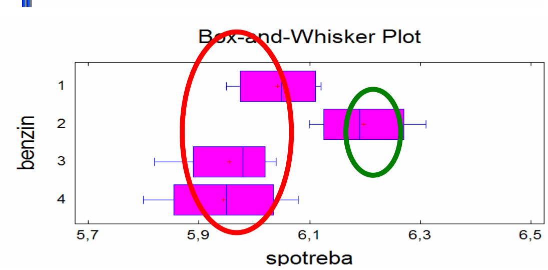
Multiple Range Tests for spotreba by benzin

Method: 95,0 percent LSD

benzin	Count	Mean	Homogeneous Groups	
4	4	5,945	X	
3	4	5,955	X	
1	4	6,0425	X	
2	4	6,1975		X

Contrast	Difference	+/- Limits
1 - 2	*-0,155	0,15092
1 - 3	0,0875	0,15092
1 - 4	0,0975	0,15092
2 - 3	*0,2425	0,15092
2 - 4	*0,2525	0,15092
3 - 4	0,01	0,15092

* denotes a statistically significant difference.



13.3. Příklad pedagogického výzkumu: Zjistěte, zda používání elektronických stavebnic má pozitivní vliv na vytváření a rozvoj žákových vědomostí a dovedností. Pro ověření tohoto výzkumu byly získány údaje o bodovém hodnocení studentů SŠ při závěrečné zkoušce z Elektrotechniky. Studenti byli rozděleni do tří skupin – skupina A – zahrnovala studenty, kteří při výuce používali stavebnici ZEM Elektronik, skupina B – používala stavebnici pro technické práce a základy techniky pro 8. třídy, skupina C při výuce žádnou stavebnici nepoužívala. Dosažené výsledky jsou zaznamenány v následující tabulce. (pro řešení použijte Kruskal-Wallisův test).

A	B	C
6,4	2,5	1,3
6,8	3,7	4,1
7,2	4,9	4,9
8,3	5,4	5,2
8,4	5,9	5,5
9,1	8,1	8,2
9,4	8,2	
9,7		

Řešení:

Kruskal-Wallisův test je alternativou k ANOVĚ (F-testu). V praxi používáme tento test v případech, kdy je splněna homoskedasticita, avšak není splněn předpoklad normality u všech výběrů. Jde o neparametrický test.

Testujeme hypotézu **H_0:** $x_{0,5_A} = x_{0,5_B} = x_{0,5_C}$

Oproti alternativě **H_A:** neplatí H_0

Vytvoříme modifikovaný soubor, který je dán pořadím původních dat v jednom uspořádaném výběru a zároveň určíme součty pořadí pro jednotlivé výběry.

	A	B	C	
	11	2	1	
	12	3	4	
	13	5,5	5,5	
	17	8	7	
	18	10	9	
	19	14	15,5	
	20	15,5		
	21			
T_i	131	58	42	
n_i	8	7	6	N=21

Stanovíme pozorovanou hodnotu:

$$Q = \frac{12}{N\cdot(N+1)}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{T_i^2}{n_i} - 3\cdot(N+1) = \frac{12}{21\cdot(21+1)}\cdot\left(\frac{131^2}{8}+\frac{58^2}{7}+\frac{42^2}{6}\right) - 3\cdot(21+1) = 9{,}84$$

V tabulce rozdělení Chí-kvadrát (3-1=2 stupně volnosti) najdeme hodnotu distribuční funkce a pomocí ní určíme p-value:

$$0{,}990 < F(9{,}84) < 0{,}995$$
$$\Rightarrow 0{,}005 < F(9{,}84) < 0{,}010$$
$$\Rightarrow 0{,}005 < p - value < 0{,}010$$

$p - value < 0{,}010$, proto nulovou hypotézu zamítneme, tzn. že existuje vliv používání elektronických stavebnic na dovednosti a znalosti studentů. Dále bychom měli přistoupit k post hoc analýze.

Řešení ve Statgraphicsu:

Použijeme soubor **Stavebnice.sf3**.

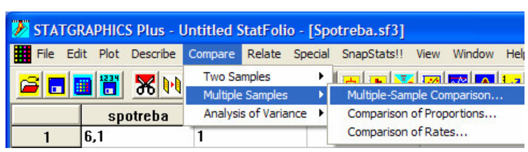
Předpokladem Kruskal-Wallisova testu je homoskedasticita, proto ji nejdříve již známým způsobem ověříme:

```
Variance Check

Cochran's C test: 0,453753   P-Value = 0,641281
Bartlett's test: 1,14199   P-Value = 0,329271
Hartley's test: 3,25053
Levene's test: 0,516474   P-Value = 0,605199
```

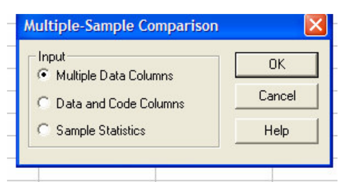
Homoskedasticita byla potvrzena, proto můžeme přistoupit k vlastnímu testu.

Testujeme hypotézu **H$_0$:** $x_{0,5_A} = x_{0,5_B} = x_{0,5_C}$
Oproti alternativě **H$_A$:** neplatí H$_0$

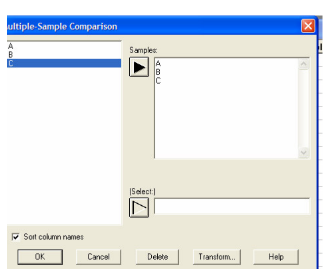
Zvolíme menu **Compare\Multiple Samples\Multiple-Sample Comparison …**



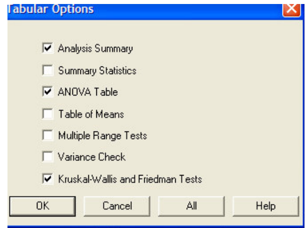
V okně **Multiple-Sample Comparison** zvolíme jako typ vstupního souboru **Multiple Data Columns** (vícevýběrový soubor – více výběrů v jednotlivých sloupcích).



Jako **Samples** (výběry) zadáme "A,B,C".



Klikneme na ikonu **Tabular Options** a zvolíme položku **Kruskal-Wallis and Friedman Tests**.



Srovnejte získané výsledky s „ručním“ výpočtem.

```
Kruskall-Wallis Test

                    Sample Size          Average Rank
------------------------------------------------------------
A                   8                    16,375
B                   7                    8,28571
C                   6                    7,0
------------------------------------------------------------
Test statistic = 9,84906   P-Value = 0,00726613


The StatAdvisor
---------------
   The Kruskal-Wallis test tests the null hypothesis that the medians
within each of the 3 columns is the same.  The data from all the
columns is first combined and ranked from smallest to largest.  The
average rank is then computed for the data in each column.  Since the
P-value is less than 0,05, there is a statistically significant
difference amongst the medians at the 95,0% confidence level.  To
determine which medians are significantly different from which others,
select Box-and-Whisker Plot from the list of Graphical Options and
select the median notch option.
```

$\mathrm{p}-value < 0{,}010$, proto nulovou hypotézu zamítneme, tzn. že existuje vliv používání elektronických stavebnic na dovednosti a znalosti studentů.

Přistoupíme k post hoc analýze (postupujeme stejně jako v předcházejících příkladech):

```
Multiple Range Tests

--------------------------------------------------------------------------------
Method: 95,0 percent LSD
              Count     Mean              Homogeneous Groups
--------------------------------------------------------------------------------
C             6         4,86667           X
B             7         5,52857           X
A             8         8,1625             X
--------------------------------------------------------------------------------
Contrast                                  Difference           +/-  Limits
--------------------------------------------------------------------------------
A - B                                    *2,63393              2,0259
A - C                                    *3,29583              2,11403
B - C                                     0,661905             2,17778
--------------------------------------------------------------------------------
* denotes a statistically significant difference.
```

Je zřejmé, že zamítnutí nulové hypotézy je způsobeno výsledky skupiny A, tzn. že jako statistický významný se projevuje vliv používání stavebnice ZEM Elektronik – používání stavebnice pro 8. třídy má stejný efekt jako nepoužívání stavebnice.