11 TESTOVÁNÍ PARAMETRICKÝCH HYPOTÉZ

Pojmem testování statistických hypotéz označujeme rozhodování o pravdivosti **parametrických**, resp. **neparametrických hypotéz** o populaci. V tomto rozhodovacím procesu oproti sobě stojí **nulová** a **alternativní hypotéza** a naším cílem je rozhodnout, zda data z výběrového souboru ($\underline{X}$) odpovídají nulové hypotéze.

Jelikož při rozhodování o nulové hypotéze vycházíme z výběrového souboru, který nemusí dostatečně přesně odpovídat vlastnostem základního souboru, můžeme se při rozhodování dopustit chyby. Při rozhodování mohou nastat situace, které popisuje následující tabulka:

		Výsledek testu	
		Nezamítáme H_0	**Zamítáme H_0**
Skutečnost	**Platí H_0**	Správné rozhodnutí Pravděpodobnost rozhodnutí: $1-\alpha$ (spolehlivost)	**Chyba I. druhu** Pravděpodobnost rozhodnutí: α (hladina významnosti)
	Platí H_A	**Chyba II. druhu** Pravděpodobnost rozhodnutí: β	Správné rozhodnutí Pravděpodobnost rozhodnutí: $1-\beta$ (síla testu)

V inženýrských aplikacích se mnohdy setkáváme s tzv. **operativní charakteristikou**, což je závislost chyby II. druhu na přesné specifikaci alternativní hypotézy. Operativní charakteristika bývá v praxi taktéž nahrazována **křivkou síly testu**, což je závislost (1-β) na přesné specifikaci alternativní hypotézy.

Při testování hypotéz se běžně můžeme setkat se dvěma přístupy – klasickým testem a čistým testem významnosti.

Klasický test se skládá z několika kroků:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy
2. Volba testové statistiky (testového kritéria) $T(\underline{X})$
3. Sestrojení kritického oboru a oboru přijetí
4. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky $T(\underline{X})$ - x_{OBS}
5. Formulace závěru testu – každý test vede ke dvěma možným výsledkům

Oproti klasickému testu nepotřebuje čistý test významnosti znát hladinu významnosti jako vstupní údaj. Jeho výsledek nám umožňuje rozhodnout na jakých hladinách významnosti můžeme nulovou hypotézu zamítnout (resp. nezamítnout).

Čistý test významnosti se skládá z následujících kroků:

1. Formulace nulové a alternativní hypotézy
2. Volba testové statistiky (testového kritéria) $T(\underline{X})$
3. Výpočet pozorované hodnoty testové statistiky x_{OBS} a výpočet statistiky p-value

P-value je tedy nejnižší hladina významnosti na níž můžeme nulovou hypotézu zamítnout a zároveň nejvyšší hladiny významnosti na níž se již nulová hypotéza nezamítá.

P-value vypočteme podle jedné ze tří možných definic v závislosti na tvaru alternativní hypotézy (je nutné aby alternativní hypotéza korespondovala s výběrovým souborem).

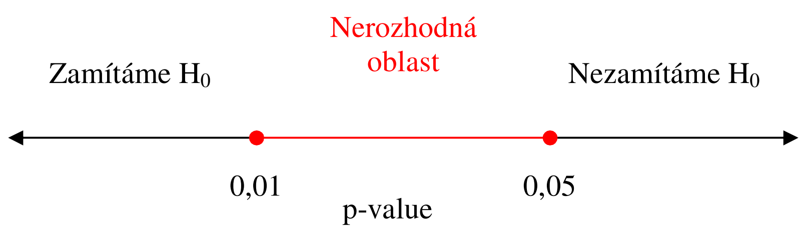
1. H_A ve tvaru „<“: $p-value = F_0(x_{OBS})$
2. H_A ve tvaru „>“: $p-value = 1-F_0(x_{OBS})$
3. H_A ve tvaru „≠“: $p-value = 2\cdot\min\{F_0(x_{OBS}); 1-F_0(x_{OBS})\}$

Rozhodnutí na základě p-value

Rozhodnutí:

$\alpha > p-value$	Zamítáme H_0 ve prospěch H_A
$\alpha < p-value$	Nezamítáme H_0

Obecně rozhodujeme o zamítnutí nulové hypotézy na základě následujícího schématu, které je založeno na nejběžněji používaných hladinách významnosti (0,01 a 0,05).



Stručný přehled testových statistik, s nimiž jsme se seznámili

Jednovýběrové parametrické testy

Testovaný parametr	Pozn.	Testová statistika	Nulové rozdělení
Střední hodnota μ	Známe-li σ	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}$	$N(0;1)$
Střední hodnota μ	Neznáme-li σ	$T_{n-1}=\frac{\overline{X}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n}$	t_{n-1}
Rozptyl σ^2 (směrodatná odchylka σ)		$\chi=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$	χ^2_{n-1}
Relativní četnost π		$P_1=\frac{p-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\cdot\sqrt{n}$	$N(0;1)$

Jednovýběrové neparametrické testy

Testovaný parametr	Pozn.	Testová statistika	Nulové rozdělení
Medián $x_{0,5}$	Znaménkový test, používáme u výrazně zešikmených výběrů většího rozsahu	Y … počet pozorování v náhodném výběru o rozsahu n, které překročí $x_{0,5_0}$	$Bi(n;0,5)$
Medián $x_{0,5}$		$W=\frac{\overline{r^*}}{s_{r^*}}\cdot\sqrt{n}$	$N(0;1)$

Dvouvýběrové parametrické testy pro nezávislé výběry

Testované parametry	Pozn.	Testová statistika	Nulové rozdělení
Střední hodnoty μ_1, μ_2	Známe-li σ_1, σ_2	$Z_2=\dfrac{\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0;1)$
Střední hodnoty μ_1, μ_2	Neznáme-li σ_1, σ_2	$T_2=\dfrac{\left(\overline{X_1}-\overline{X_2}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{s_p\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$, $s_p=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^{\,2}+(n_2-1)s_2^{\,2}}{n_1+n_2-2}}$	$t_{n_1+n_2-2}$
Rozptyly σ_1^2, σ_2^2 (směrodatné odchylky σ_1, σ_2)		$F=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$	$F(m,n)$
Relativní četnosti π_1, π_2		$P_2=\dfrac{(p_1-p_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{p\cdot(1-p)\cdot\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$, $p=\dfrac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$	$N(0;1)$

Dvouvýběrové neparametrické testy

Testované parametry	Pozn.	Testová statistika	Nulové rozdělení
Mediány $x_{0,5_1}, x_{0,5_2}$	Mannův – Whitneův test	$W_2=\dfrac{\overline{r_1}-\overline{r_2}}{s_r\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$, $s_r=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_{r_1}^{\,2}+(n_2-1)s_{r_2}^{\,2}}{n_1+n_2-2}}$	$N(0;1)$

Dvouvýběrové párové testy

Předpokládejme n měřených jednotek (či objektů), na nichž jsou provedena dvě pozorování, daná různými experimentálními podmínkami (např. působí či nepůsobí nějaký faktor, jehož účinky jsou předmětem šetření). Testování provádíme tak, že vytvoříme jednu datovou hodnotu pro každý měřený objekt. V nejjednodušším datovém modelu bude touto hodnotou rozdíl získaných dvou pozorování pro daný *i*-tý měřený objekt. Dané rozdíly pak mohou být použity pro jednovýběrové testy o tom, zda sledovaný parametr je nula, což je ekvivalentní s tím, že neexistují žádné rozdíly mezi experimentálními podmínkami (nebo že zkoumaný faktor je neúčinný).

11.1. Byly naměřeny následující hodnoty IQ (výsledky testu inteligence) pro 10 vybraných účastníků inteligenčního testu (účastníky byli studenti posledního ročníku základní školy):

65	**98**	**103**	**77**	**93**
102	**102**	**113**	**80**	**94**

Předpokládejme, že náhodný výběr pochází z normálního rozdělení se směrodatnou odchylkou σ = 15. Ověřte čistým testem významnosti hypotézu, že střední hodnota IQ studentů závěrečného ročníku ZŠ je rovna 100.

Řešení:
Chceme testovat střední hodnotu přičemž známe směrodatnou odchylku. Předpoklad normality základního souboru byl splněn, můžeme tedy přistoupit k testu:

Vstupní data: $\sigma = 15$

Výběr: $\overline{X} = \dfrac{65 + 98 + \ldots + 94}{10} = 92{,}7$

$n = 10$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\mu = 100$
H_A: $\mu < 100$
(protože výběr ukazuje na to, že střední hodnota by mohla být nižší než 100 – (92,7 < 100))

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \to N(0;1)$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

$$x_{OBS} = Z_{H_0} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{92{,}7 - 100}{15} \cdot \sqrt{10} = -1{,}54$$

Výpočet p-value:

H_A: $\mu < 100$ $\Rightarrow$ $p - value = F_0(x_{OBS})$

$$p - value = \Phi(-1{,}54) = 1 - \Phi(1{,}54) = 1 - 0{,}938 = 0{,}062$$

(tzn. nulovou hypotézu můžeme zamítnou na hladině významnosti 0,062 a nižších)

Rozhodnutí:

$p - value > 0{,}05$ $\Rightarrow$ Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. zamítáme alternativu, tj. nelze tvrdit, že IQ studentů závěrečného ročníku ZŠ je nižší než 100.

Řešení ve Statgraphicsu:

Statgraphics nám umožňuje provádět jednovýběrové parametrické testy pro tyto parametry normálního rozdělení: střední hodnota, směrodatná odchylka, relativní četnost (podíl). Pro testování střední hodnoty se používá pouze výběrová statistika T.

Začneme tím, že si určíme parametry výběru a stanovíme nulovou a alternativní hypotézu:

Vstupní data: $\sigma = 15$

Výběr: $\overline{X} = \frac{65 + 98 + \ldots + 94}{10} = 92{,}7$

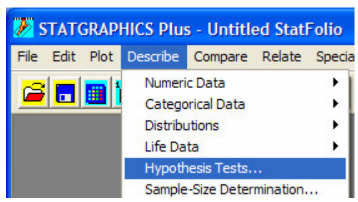
$n = 10$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

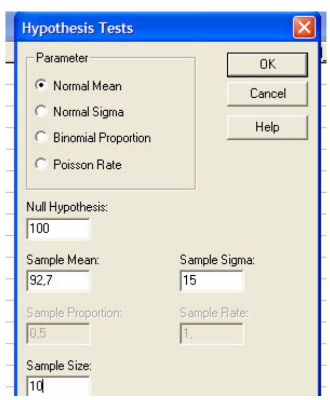
H_0: $\mu = 100$

H_A: $\mu < 100$

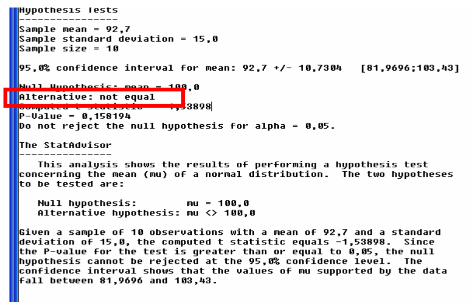
V našem případě chceme testovat střední hodnotu. V menu **Describe** zvolíme položku **Hypothesis Tests …**

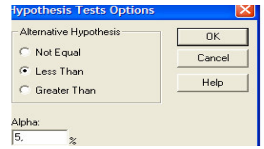


V okně Hypothesis Test zadáme požadované údaje: **zaškrtneme pole Normal Mean** (střední hodnota normálního rozdělení), do pole **Null Hypothesis** zadáme hodnotu, které by střední hodnota dosáhla v případě platnosti nulové hypotézy, tj. 100, jako **Sample mean** (= výběrová střední hodnota = průměr) zadáme 92,7, jako **Sample Sigma** (= výběrová směrodatná odchylka) zadáme 15 a do pole **Sample Size** (= rozsah výběru) zapíšeme 10.

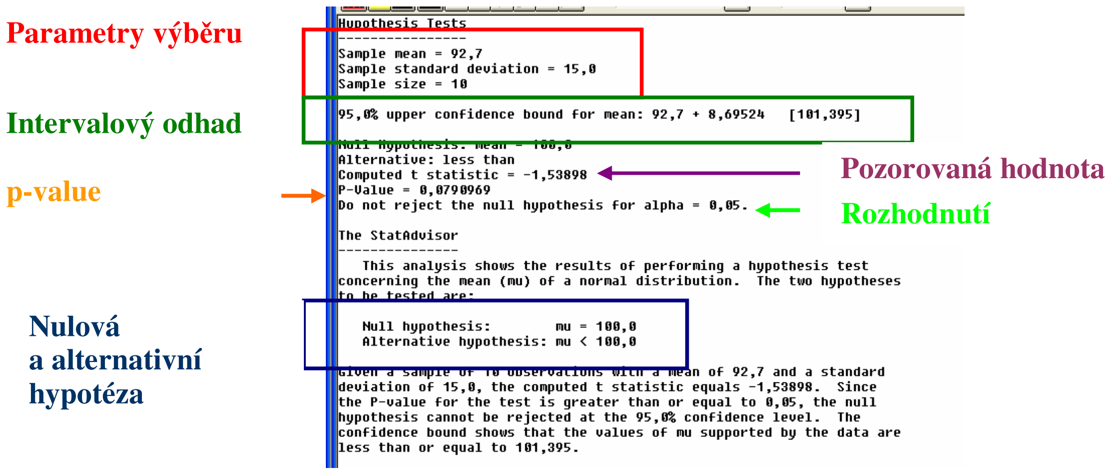


Výstupem této procedury jsou opět dvě okna – textový a grafický výstup. Textový výstup nám nabízí intervalový odhad pro testovaný parametr (viz. předcházející cvičení) a výsledky testu, tj. **nulovou a alternativní hypotézu** (POZOR!!! Je zde přednastavená oboustranná alternativa, kterou musíme případně změnit v menu Analysis Option (RC na textový výstup) podle skutečné alternativy), **hodnotu testové statistiky za předpokladu, že platí nulová hypotéza** (pozorovaná hodnota) a **hodnotu p-value**. V textovém výstupu rovněž nalezneme **vyhodnocení testu pro příslušnou hladinu významnosti** (přednastavená hodnota je 5% - změnit ji můžeme v menu Analysis Option (RC na textový výstup)).





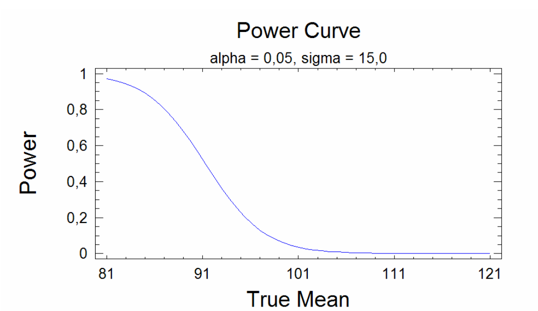
V našem případě je alternativní hypotéza ve tvaru „menší než“, proto v menu **Analysis Option** tvar alternativy změníme na **„Less Than“**.



Slovníček: Reject … zamítnout
Do not reject … nezamítnout

V našem případě je p-value rovno 0,079 (jako testová statistika byla použita statistika T, nikoliv Z jako při „ručním“ výpočtu) a proto nemůžeme nulovou hypotézu na 5% ní hladině významnosti zamítnout, tj. nelze tvrdit, že IQ studentů závěrečného ročníku ZŠ je nižší než 100.

Grafický výstup nám nabízí **křivku síly testu**.



Pro konkrétní hodnotu alternativy zde můžeme odečíst pravděpodobnost zamítnutí nulové hypotézy (1-β).

11.2. Byly naměřeny následující hodnoty IQ (výsledky testu inteligence) pro 10 vybraných účastníků inteligenčního testu (účastníky byli studenti posledního ročníku základní školy):

65	**98**	**103**	**77**	**93**
102	**102**	**113**	**80**	**94**

Předpokládejme, že náhodný výběr pochází z normálního rozdělení se směrodatnou odchylkou σ = 15. Ověřte klasickým testem významnosti hypotézu, že střední hodnota IQ studentů závěrečného ročníku ZŠ je rovna 100.

Řešení:
Chceme testovat střední hodnotu přičemž známe směrodatnou odchylku. Předpoklad normality základního souboru byl splněn, můžeme tedy přistoupit k testu:

Vstupní data: $\sigma = 15$

Výběr: $\overline{X} = \dfrac{65+98+\ldots+94}{10} = 92{,}7$

$n = 10$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\mu = 100$

H_A: $\mu < 100$

(protože výběr ukazuje na to, že střední hodnota by mohla být nižší než 100 – (92,7 < 100))

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

$$x_{OBS} = Z_{H_0} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{92{,}7 - 100}{15} \cdot \sqrt{10} = -1{,}54$$

Až do této chvíle se postupy obou typů testu neliší. V klasickém testu však místo p-value určujeme kritický obor.

Stanovení kritického oboru C:

H_A: $\mu < 100$ $\Rightarrow$ $C \le T_\alpha$

Tzn. v tuto chvíli se musíme rozhodnou na jaké hladině významnosti (s jakou spolehlivosti) budeme test provádět. Pro hladinu významnosti 5%:

$C \le T_{0,05}$

$C \le z_{0,05}$

$C \le z_{0,05}$

$C \le -z_{0,95}$

$C \le -1{,}645$ (viz. Tabulka 1)

Rozhodnutí:

$x_{OBS} \notin C \quad (-1{,}54 > -1{,}645) \quad \Rightarrow$ x_{OBS} neleží v kritickém oboru, tzn. že leží v oboru přijetí ($x_{OBS} \in A$) $\Rightarrow$
Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. zamítáme alternativu, tj. nelze tvrdit, že IQ studentů závěrečného ročníku ZŠ je nižší než 100.

11.3. Výrobce garantuje, že jím vyrobené žárovky mají životnost v průměru 1.000 hodin. Aby útvar kontroly zjistil, zda tomuto konstatování odpovídá i v daném období vyrobená a expedovaná část produkce, vybral z připravené dodávky náhodně 50 žárovek a došel k závěru, že průměrná doba životnosti je 1050 hodin a směrodatná odchylka doby životnosti pak 100 hodin. Ověřte čistým testem významnosti, zda nedošlo ke zlepšení kvality žárovek.

Řešení:

Měřítkem kvality žárovek je jejich střední životnost. Chceme tedy testovat střední hodnotu přičemž směrodatnou odchylku neznáme. Předpokládejme, že životnost žárovek podléhá normálnímu rozdělení.

Vstupní data: Výběr:

$\overline{X} = 1050\ hodin$
$s = 100\ hodin$
$n = 50$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\mu = 1000$ (rovnovážný stav, střední životnost se nezměnila)
H_A: $\mu > 1000$
(výběr ukazuje na to, že střední životnost by mohla být vyšší než 1000 – (1150 > 1000))

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = T_{n-1} = \frac{\overline{X} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n} \rightarrow t_{n-1}$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

$$x_{OBS} = T_{n-1_{H_0}} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{1050 - 1000}{100} \cdot \sqrt{50} = 3{,}54$$

Výpočet p-value:

H_A: $\mu > 1000 \quad \Rightarrow$

$p - value = 1 - F_0(x_{OBS})$
$p - value = 1 - F_0(3{,}54)$
$F_0(3{,}54) > 0{,}9995$ viz. Tabulka 2
(Studentovo rozdělení, 49 stupňů volnosti)
$p - value < 0{,}0005$

Rozhodnutí:

$p - value < 0{,}01 \qquad \Rightarrow$

Zamítáme nulovou hypotézu ve prospěch alternativní, tj. lze tvrdit, že kvalita žárovek se zlepšila.

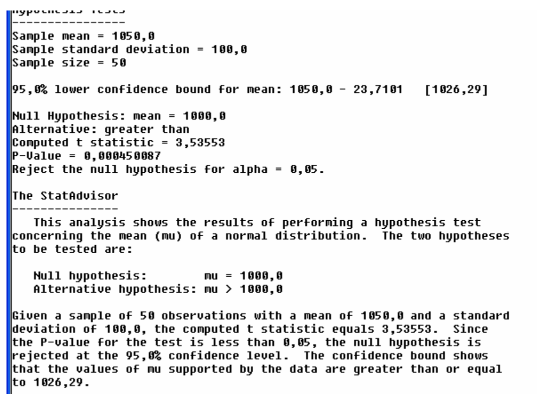
Řešení ve Statgraphicsu:

(viz. Př. 11.1.)

Vstupní data: Výběr:
$\overline{X} = 1050\,hodin$
$s = 100\,hodin$
$n = 50$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\mu = 1000$ (rovnovážný stav, střední životnost se nezměnila)
H_A: $\mu > 1000$
(výběr ukazuje na to, že střední životnost by mohla být vyšší než 1000 – (1150 > 1000))



```
----------------
Sample mean = 1050,0
Sample standard deviation = 100,0
Sample size = 50

95,0% lower confidence bound for mean: 1050,0 - 23,7101   [1026,29]

Null Hypothesis: mean = 1000,0
Alternative: greater than
Computed t statistic = 3,53553
P-Value = 0,000450087
Reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

The StatAdvisor
---------------
   This analysis shows the results of performing a hypothesis test
concerning the mean (mu) of a normal distribution.  The two hypotheses
to be tested are:

   Null hypothesis:        mu = 1000,0
   Alternative hypothesis: mu > 1000,0

Given a sample of 50 observations with a mean of 1050,0 and a standard
deviation of 100,0, the computed t statistic equals 3,53553.  Since
the P-value for the test is less than 0,05, the null hypothesis is
rejected at the 95,0% confidence level.  The confidence bound shows
that the values of mu supported by the data are greater than or equal
to 1026,29.
```

11.4. Určitý druh lilie dorůstá průměrné výšky 85 cm se směrodatnou odchylkou 10 cm. Skupina 100 těchto lilií byla pěstována za nových, příznivějších podmínek, aby se zjistilo, zda se výška zvýší.
a) Určete mezní hodnotu průměrné výšky tohoto vzorku, za níž bude možno nulovou hypotézu zamítnout na 5%-ní hladině významnosti.
b) Bude-li skutečná průměrná výška těchto 100 rostlin 88cm, jak rozhodneme o nulové hypotéze?
c) Načrtněte operativní charakteristiku.

Řešení:

Ze zadání úlohy usuzujeme, že máme rozhodovat o střední hodnotě výšky rostliny, přičemž známe směrodatnou odchylku populace.

ada) V této části úlohy máme zadánu kritickou hodnotu chyby I. druhu, tj. p-value a máme určit příslušný kritický průměr. Abychom věděli, jakým způsobem určujeme p-value (máme na výběr ze tří možností), musíme nejdříve stanovit nulovou a alternativní hypotézu.

H_0: $\mu = 85$
H_A: $\mu > 85$

$\Rightarrow \quad p\text{ - value} = 1 - F(x_{OBS})$

Volba testové statistiky a nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

Výpočet:

$$x_{OBS} = Z_{H_0} = \frac{\overline{X}_{krit} - 85}{10} \cdot \sqrt{100} = \overline{X}_{krit} - 85$$

$$p\text{ - value} = 1 - F(x_{OBS})$$

$$0{,}05 = 1 - \Phi(\overline{X}_{krit} - 85)$$

$$0{,}95 = \Phi(\overline{X}_{krit} - 85)$$

$$1{,}645 = \overline{X}_{krit} - 85$$

$$\underline{\underline{\overline{X}_{krit} = 86{,}645}}$$

Tzn. překročí-li průměrná výška 100 rostlin 86,6 cm, můžeme nulovou hypotézu na 5%-ní (a vyšší) hladině významnosti zamítnout.

adb) O této otázce můžeme rozhodnout buď na základě výsledku z bodu a) - 88 cm je více než 86,6 cm a proto pro tento průměr můžeme nulovou hypotézu na 5%-ní (a vyšší) hladině významnosti zamítnout – nebo můžeme klasickým způsobem provést čistý test významnosti:

Volba nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\mu = 85$
H_A: $\mu > 85$

Volba testové statistiky a nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

Výpočet pozorované hodnoty:

$$x_{OBS} = Z_{H_0} = \frac{88 - 85}{10} \cdot \sqrt{100} = 3{,}00$$

Výpočet p-value:

H_A: $\mu > 85$ $\Rightarrow \quad p\text{ - value} = 1 - \Phi(3{,}00) < 0{,}003$

Rozhodnutí:

p - value $< 0{,}01 \quad \Rightarrow$

Zamítáme nulovou hypotézu ve prospěch alternativy, tj. můžeme tvrdit, že lepší podmínky při pěstování tohoto druhu lilií vedly k vyšší výšce rostlin.

adc) Operativní charakteristika je závislosti β na konkrétních hodnotách alternativy (při pevně zvolené hodnotě α). Stanovíme si proto hodnoty pravděpodobnosti chyby II. druhu (β) na několika různých hodnotách alternativy (např. 85,5; 86; 87; 88 cm).

Zvolíme-li α rovno 5%, pak k nezamítnutí nulové hypotézy dojde tehdy, nepřekročí-li průměr hodnotu 86,6 cm (viz. úloha a) – pokud bychom tento výsledek neměli k dispozici, museli bychom kritickou hodnotu průměru určit).

$$\beta = P\left(\overline{X} < 86{,}645 \middle| H_A\right)$$

H_0: $\mu = 85$

H_A:
1) $\mu = 85{,}5$
2) $\mu = 86{,}0$
3) $\mu = 87{,}0$
4) $\mu = 88{,}0$

Volba testové statistiky:

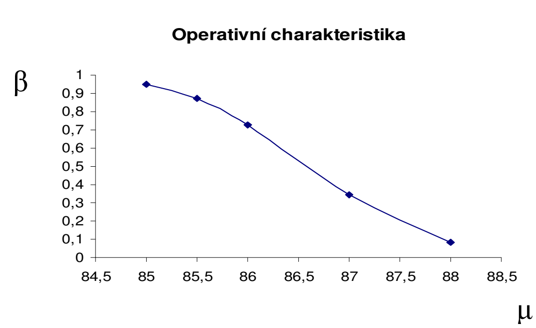
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

ad1.) $\beta = P\left(\overline{X} < 86{,}6 \middle| H_A\right) = P\left(Z < \frac{86{,}645 - 85{,}5}{10} \cdot \sqrt{100}\right) = P(Z < 1{,}15) = \Phi(1{,}15) = 0{,}875$

ad2.) $\beta = P\left(\overline{X} < 86{,}6 \middle| H_A\right) = P\left(Z < \frac{86{,}6 - 86{,}0}{10} \cdot \sqrt{100}\right) = P(Z < 0{,}6) = \Phi(0{,}6) = 0{,}726$

ad3.) $\beta = P\left(\overline{X} < 86{,}6 \middle| H_A\right) = P\left(Z < \frac{86{,}6 - 87{,}0}{10} \cdot \sqrt{100}\right) = P(Z < -0{,}4) = 1 - \Phi(0{,}4) = 0{,}345$

ad4.) $\beta = P\left(\overline{X} < 86{,}6 \middle| H_A\right) = P\left(Z < \frac{86{,}6 - 88{,}0}{10} \cdot \sqrt{100}\right) = P(Z < -1{,}4) = 1 - \Phi(1{,}4) = 0{,}081$



11.5. Při analýze diferenciace mezd ve velkém podniku bylo zjištěno, že průměrná měsíční mzda činila 9.386,-Kč a směrodatná odchylka mezd 1.562,- Kč. Po rozsáhlých organizačních změnách bylo nutné rychle posoudit, zda došlo ke změnám v diferenciaci mezd. Náhodně bylo vybráno 30 pracovníků a byla zjištěna směrodatná odchylka mezd 1.708,-Kč. Je možné tvrdit, že organizační změny prohloubily diferenciaci mezd?

Řešení:

Měřítkem diferenciace (rozložení) mezd je jejich směrodatná odchylka (resp. rozptyl). Chceme tedy testovat směrodatnou odchylku.

Vstupní data: Výběr: $s = 1708\ Kč$

$n = 30$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\sigma = 1562$ (rovnovážný stav, v našem případě počáteční stav)
H_A: $\sigma > 1562$
(výběr ukazuje na to, že směrodatná odchylka by mohla být vyšší než 1562 (1708 > 1562))

Převedení problému na test rozptylu:

H_0: $\sigma^2 = 1562^2$
H_A: $\sigma^2 > 1562^2$

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = \chi = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

$$x_{OBS} = \chi_{H_0} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{29 \cdot 1708^2}{1562^2} = 34{,}7$$

Výpočet p-value:

H_A: $\sigma^2 > 1562^2$ $\Rightarrow$ $p-value = 1 - F_0(x_{OBS})$

$p-value = 1 - F_0(34{,}7)$

$0{,}750 < F_0(34{,}7) < 0{,}900$ viz. Tabulka 3

$0{,}100 < p-value < 0{,}250$

Rozhodnutí:

$p-value > 0{,}05$ $\Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. lze tvrdit, že diferenciace mezd se nezvýšila.

Řešení ve Statgraphicsu:

Vstupní data: Výběr: $s = 1708\ Kč$

$n = 30$

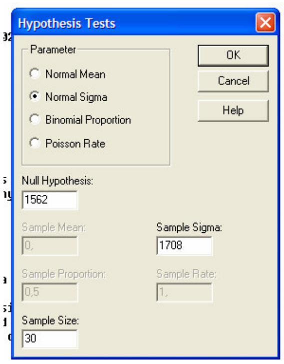
Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

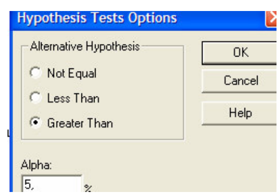
H_0: $\sigma = 1562$ (rovnovážný stav, v našem případě počáteční stav)
H_A: $\sigma > 1562$
(výběr ukazuje na to, že směrodatná odchylka by mohla být vyšší než 1562 (1708 > 1562))

Problém nepřevádíme na testování rozptylu, neboť Statgraphics umožňuje pouze testování směrodatné odchylky.

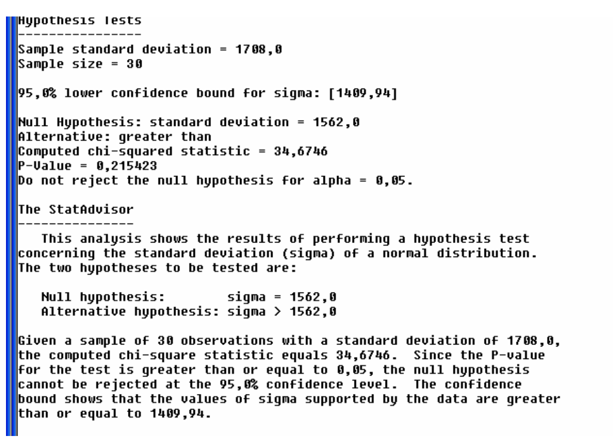
V menu **Describe** zvolíme položku **Hypothesis Tests …**

V okně Hypothesis Test zadáme požadované údaje: **zaškrtneme pole Normal Sigma** (směrodatná odchylka normálního rozdělení), do pole **Null Hypothesis** zadáme hodnotu, které by směrodatná odchylka dosáhla v případě platnosti nulové hypotézy, tj. 1562, jako **Sample sigma** (= výběrová směrodatná odchylka) zadáme 1708 a do pole **Sample Size** (= rozsah výběru) zapíšeme 30.





V našem případě je alternativní hypotéza ve tvaru „větší než“, proto v menu **Analysis Option** tvar alternativy změníme na **„Greather Than“**.



```
Hypothesis Tests
----------------
Sample standard deviation = 1708,0
Sample size = 30

95,0% lower confidence bound for sigma: [1409,94]

Null Hypothesis: standard deviation = 1562,0
Alternative: greater than
Computed chi-squared statistic = 34,6746
P-Value = 0,215423
Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

The StatAdvisor
---------------
   This analysis shows the results of performing a hypothesis test
concerning the standard deviation (sigma) of a normal distribution.
The two hypotheses to be tested are:

   Null hypothesis:        sigma = 1562,0
   Alternative hypothesis: sigma > 1562,0

Given a sample of 30 observations with a standard deviation of 1708,0,
the computed chi-square statistic equals 34,6746.  Since the P-value
for the test is greater than or equal to 0,05, the null hypothesis
cannot be rejected at the 95,0% confidence level.  The confidence
bound shows that the values of sigma supported by the data are greater
than or equal to 1409,94.
```

Rozhodnutí:

$p - value = 0{,}215 > 0{,}05 \quad \Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. lze tvrdit, že diferenciace mezd se nezvýšila.

11.6. Při volbách do poslanecké sněmovny v červnu 2006 dosáhla ČSSD podpory 30%. Agentura STAT udává, že při průzkumu v prosinci 2006 (1600 respondentů) zjistili pouze 25% podporu této strany. Lze z těchto výsledků usuzovat na klesající podporu ČSSD? Ověřte čistým testem významnosti.

Řešení:

Chceme testovat relativní četnost. Předpokládejme, že relativní četnost podléhá normálnímu rozdělení.

Vstupní data: Výběr: $p = 25\% = 0{,}25$
$n = 1600$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\pi = 0{,}30$ (rovnovážný stav, podpora ČSSD se nezměnila)
H_A: $\pi < 0{,}30$
(výběr ukazuje na to, že podpora ČSSD by mohla být nižší než 30% – (0,30 < 0,25))

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = P_1 = \frac{p - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}} \cdot \sqrt{n} \rightarrow N(0;1)$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

$$x_{OBS} = P_{1H_0} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}} \cdot \sqrt{n} = \frac{0{,}25 - 0{,}30}{\sqrt{0{,}30 \cdot (1 - 0{,}30)}} \cdot \sqrt{1600} = -4{,}4$$

Výpočet p-value:

H_A: $\pi < 0{,}30 \quad \Rightarrow \quad p - value = F_0(x_{OBS})$

$$p - value = \Phi(-4{,}4) = 1 - \Phi(4{,}4) = 1 - 1 = 0$$
$$p - value = 0$$

Rozhodnutí:

$p - value < 0{,}01 \quad \Rightarrow$

Zamítáme nulovou hypotézu, tzn. lze tvrdit, že pokles podpory ČSSD je statisticky významný.

Řešení ve Statgraphicsu:

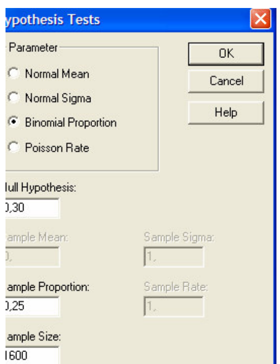
Vstupní data: Výběr: $p = 25\% = 0{,}25$
$n = 1600$

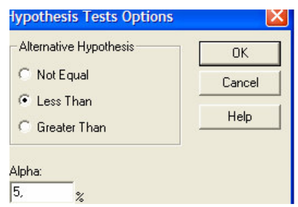
Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\pi = 0{,}30$ (rovnovážný stav, podpora ČSSD se nezměnila)
H_A: $\pi < 0{,}30$
(výběr ukazuje na to, že podpora ČSSD by mohla být nižší než 30% – (0,30 < 0,25))

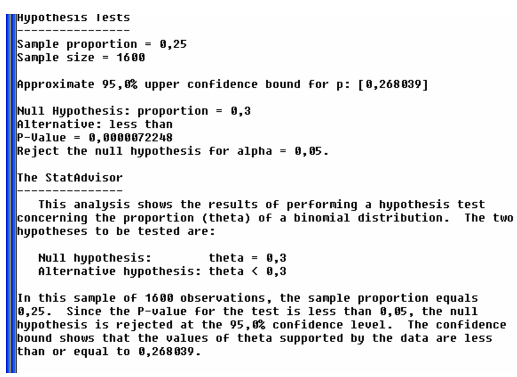
V menu **Describe** zvolíme položku **Hypothesis Tests …**

V okně Hypothesis Test zadáme požadované údaje: **zaškrtneme pole Binomial Proportion** (relativní četnost normálního rozdělení), do pole **Null Hypothesis** zadáme hodnotu, které by relativní četnost dosáhla v případě platnosti nulové hypotézy, tj. 0,30, jako **Sample Proportion** (= výběrová relativní četnost) zadáme 0,25 a do pole **Sample Size** (= rozsah výběru) zapíšeme 1600.





V našem případě je alternativní hypotéza ve tvaru „menší než“, proto v menu **Analysis Option** tvar alternativy změníme na **„Less Than“**.



```
Hypothesis Tests
----------------
Sample proportion = 0,25
Sample size = 1600

Approximate 95,0% upper confidence bound for p: [0,268039]

Null Hypothesis: proportion = 0,3
Alternative: less than
P-Value = 0,0000072248
Reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

The StatAdvisor
---------------
   This analysis shows the results of performing a hypothesis test
concerning the proportion (theta) of a binomial distribution.  The two
hypotheses to be tested are:

   Null hypothesis:        theta = 0,3
   Alternative hypothesis: theta < 0,3

In this sample of 1600 observations, the sample proportion equals
0,25.  Since the P-value for the test is less than 0,05, the null
hypothesis is rejected at the 95,0% confidence level.  The confidence
bound shows that the values of theta supported by the data are less
than or equal to 0,268039.
```

Rozhodnutí:

$p - value = 0{,}0002 <<< 0{,}01 \Rightarrow$

Zamítáme nulovou hypotézu, tj. lze tvrdit, že pokles podpory ČSSD je statisticky významný.

11.7. Byly naměřeny následující hodnoty IQ (výsledky testu inteligence) pro 10 vybraných účastníků inteligenčního testu (účastníky byli studenti posledního ročníku základní školy):

65	**98**	**103**	**77**	**93**
102	**102**	**113**	**80**	**94**

Ověřte čistým testem významnosti hypotézu, že medián IQ studentů závěrečného ročníku ZŠ je roven 100.

Řešení:

Ukážeme si řešení pomocí obou výše zmíněných testů hypotéz o mediánu. První krok, tj. stanovení nulové a alternativní hypotézy, je v obou případech stejný.

Vstupní data: Výběr: $\tilde{x} = \frac{94+98}{2} = 96$

$n = 10$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $x_{0,5} = 100$

H_A: $x_{0,5} < 100$

(výběr ukazuje na to, že medián IQ by mohl být nižší než 100)

Znaménkový test

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = Y \to Bi(n;0,5),$$

Y … počet pozorování v náhodném výběru o rozsahu n, které překročí $x_{0,5_0}$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

65	98	103	77	93
102	102	113	80	94

$x_{OBS} = Y_{H_0} = 4$ (ve výběru jsou 4 hodnoty vyšší než 100)

Výpočet p-value:

H_A: $x_{0,5} < 100$ $\Rightarrow$ $p - value = F_0(x_{OBS})$

$$Y \to Bi(10;0,5)$$

$$p - value = F_0(4) = P(Y < 4) = \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \cdot (0,5)^k \cdot (1-0,5)^{10-k}$$

$$p - value = 0,172$$

Rozhodnutí:

$p - value > 0{,}05 \qquad \Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. lze tvrdit, že IQ studentů má medián 100.

Wilcoxnův test

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = W = \frac{\overline{r^*}}{s_{r^*}} \cdot \sqrt{n} \to N(0;1),$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

Vstupní data postupně transformujeme na proměnnou r^* a z ní vypočteme hodnotu testové statistiky $\left(x_{0,5_0} = 100\right)$:

IQ	Seřazené hodnoty IQ	$y_i = \left\|x_i - x_{0,5_0}\right\|$	$r_i = rank(y_i)$	$r_i^* = r_i \cdot \mathrm{sgn}(x_i - x_{0,5_0})$
93	65	35	10	-10
94	77	23	9	-9
77	80	20	8	-8
80	93	7	6	-6
103	94	6	5	-5
113	98	2	2	-2
98	102	2	2	2
102	102	2	2	2
65	103	3	4	4
102	113	13	7	7

- Nejnižší hodnota y_i je 2. 2 se vyskytuje na 1., 2. a 3. pořadí, proto bude všem těmto hodnotám y_i přiřazeno pořadí 2 ($= \frac{1+2+3}{3}$).
- Např.: $\mathrm{sgn}(65 - 100) = -1$
  $\mathrm{sgn}(102 - 100) = 1$

$$\overline{r^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^*}{10} = -2{,}5, \qquad s_{r^*} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_i^* - \overline{r}\right)^2}{9}} = 6{,}0$$

$$x_{OBS} = W_{H_0} = \left(\frac{\overline{r^*}}{s_{r^*}} \cdot \sqrt{n}\right)_{H_0} = \frac{-2{,}5}{6{,}0} \cdot \sqrt{10} = -1{,}32$$

Výpočet p-value:

H_A: $x_{0,5} < 100$ $\Rightarrow$ $p - value = F_0(x_{OBS})$

$$p - value = \Phi(-1{,}32) = 1 - \Phi(1{,}32) = 1 - 0{,}907 = 0{,}093$$

Rozhodnutí:

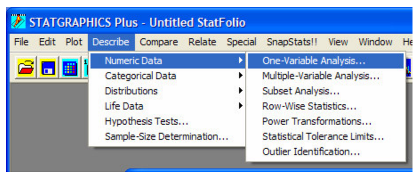
$p - value > 0{,}05$ $\Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. lze tvrdit, že IQ studentů má medián 100.

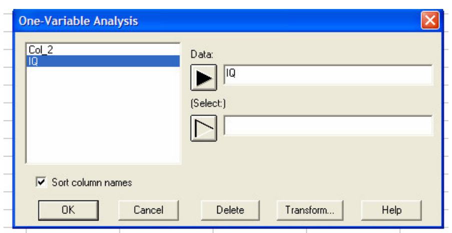
Řešení ve Statgraphicsu:

Nejdříve data zadáme do Statgraphicsu, resp. použijeme připravený datový soubor IQ.sf3

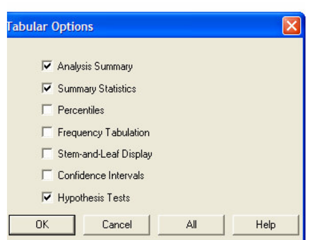
Menu **Describe\Numeric Data\ One – Variable Analysis …**



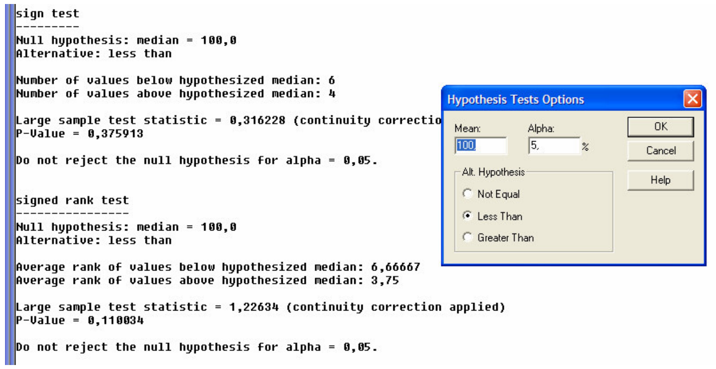
V okně One – Variable Analysis zadáme jako Data IQ.



Klikneme na **ikonu Tabular Option** a zvolíme **položku Hypothesis Thests.**



V příslušném textovém výstupu najdeme jednovýběrové testy pro střední hodnotu a medián. V textovém výstupu najdeme průměr a výběrový medián a na jejich základě zvolíme alternativu. Nastavení nulové hypotézy, alternativní hypotézy a hladiny významnosti provedeme v menu **Pane Option** (RC na textový výstup).



```
sign test
---------
Null hypothesis: median = 100,0
Alternative: less than

Number of values below hypothesized median: 6
Number of values above hypothesized median: 4

Large sample test statistic = 0,316228 (continuity correctio
P-Value = 0,375913

Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

signed rank test
----------------
Null hypothesis: median = 100,0
Alternative: less than

Average rank of values below hypothesized median: 6,66667
Average rank of values above hypothesized median: 3,75

Large sample test statistic = 1,22634 (continuity correction applied)
P-Value = 0,110034

Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05.
```


Znaménkový test

$$p - value = 0{,}376 > 0{,}05 \qquad \Rightarrow$$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. lze tvrdit, že IQ studentů má medián 100.

Wilcoxnův test

$$p - value = 0{,}110 > 0{,}05 \qquad \Rightarrow$$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. lze tvrdit, že IQ studentů má medián 100.

11.8. Tabáková firma TAB prohlašuje, že jejich cigarety mají nižší obsah nikotinu než cigarety NIK. Pro ověření tohoto prohlášení bylo náhodně vybráno z produkce TAB 20 krabiček cigaret (po 20-ti kusech) a v nich bylo zjištěno (42,6 $\pm$3,7) mg nikotinu (v jediné cigaretě). Ve 25-ti krabičkách cigaret NIK (po 20-ti kusech) bylo zjištěno (48,9 $\pm$4,3) mg nikotinu na cigaretu. Ověřte tvrzení firmy TAB čistým testem významnosti.

Řešení:

Chceme porovnávat střední obsah nikotinu v cigaretách TAB a NIK, směrodatnou odchylku obsahu nikotinu v cigaretách neznáme. Volíme tedy test pro porovnání středních hodnot dvou populací (při neznámých σ) – za předpokladu, že obsah nikotinu v cigaretách podléhá normálnímu rozdělení.

Vstupní data: Výběr 1 – firma TAB:

$$\overline{X_1} = 42{,}6\ mg$$
$$s_1 = 3{,}7\ mg$$
$$n_1 = 20.20 = 400$$

Výběr 2 – firma NIK:

$$\overline{X_2} = 48{,}9\ mg$$
$$s_2 = 4{,}3\ mg$$
$$n_2 = 25.20 = 500$$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 \quad (\mu_1 - \mu_2 = 0)$ (rovnovážný stav)
H_A: $\mu_1 < \mu_2 \quad (\mu_1 - \mu_2 < 0)$

(výběry ukazují na to, že obsah nikotinu v cigaretách TAB je nižší než obsah nikotinu v cigaretách NIK)

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = T_2 = \frac{\left(\overline{X_1} - \overline{X_2}\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \to t_{n_1+n_2-2}, \qquad \text{kde } s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

Pokud je nulová hypotéza platná, platí, že: $\mu_1 = \mu_2 \quad (\mu_1 - \mu_2 = 0)$, proto:

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{399\cdot(3{,}7)^2 + 499\cdot(4{,}3)^2}{400+500-2}} = 4{,}0$$

$$x_{OBS} = T_{2_{H_0}} = \frac{\left(\overline{X_1} - \overline{X_2}\right) - (\mu_1 - \mu_2)_{H_0}}{s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(42{,}6 - 48{,}9) - (0)}{4{,}0 \cdot \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{500}}} = -23{,}2$$

Výpočet p-value:

H$_A$: $\mu_1 < \mu_2 \quad (\mu_1 - \mu_2 < 0) \quad \Rightarrow$

$p - value = F_0(x_{OBS})$

$p - value = F_0(-23{,}2)$

$p - value < 0{,}0005$ viz. Tabulka 2

(Studentovo rozdělení s 898 (=400+500-2) stupni volnosti)

Rozhodnutí:

$p - value < 0{,}01 \quad \Rightarrow$

Zamítáme nulovou hypotézu, tj. tvrzení firmy TAB lze považovat za pravdivé.

Řešení ve Statgraphicsu:

Statgraphics nám umožňuje provádět dvouvýběrové parametrické testy pro srovnání těchto parametrů normálního rozdělení: střední hodnoty, směrodatné odchylky, relativní četnosti (podíly). Pro srovnání středních hodnot se používá pouze výběrová statistika T.

Začneme opět tím, že si určíme parametry výběrů a stanovíme nulovou a alternativní hypotézu:

Vstupní data: Výběr 1 – firma TAB:

$\overline{X_1} = 42{,}6\ mg$

$s_1 = 3{,}7\ mg$

$n_1 = 20.20 = 400$

Výběr 2 – firma NIK: $\overline{X_2} = 48{,}9\ mg$

$s_2 = 4{,}3\ mg$

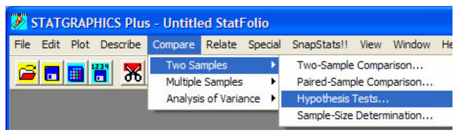
$n_2 = 25.20 = 500$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

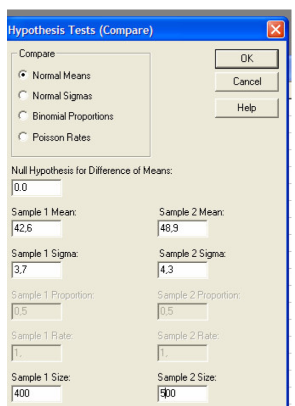
H_0: $\mu_1 = \mu_2$ $(\mu_1 - \mu_2 = 0)$ (rovnovážný stav)

H_A: $\mu_1 < \mu_2$ $(\mu_1 - \mu_2 < 0)$

V našem případě chceme porovnávat střední hodnoty. V menu **Compare\Two Samples** zvolíme položku **Hypothesis Tests …**

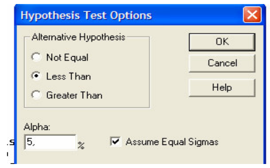


V okně **Hypothesis Tests (Compare)** zaškrtneme pole **Normal Means** a vyplníme požadované parametry – v poli **Null Hypothesi for Diference of Means** (nulová hypotéza pro rozdíl středních hodnot) ponecháme 0, **Sample 1 Mean** (průměr pro 1. výběr (TAB) = 42,6), **Sample 1 Sigma** (výběrová směrodatná odchylka pro 1. výběr (TAB) = 3,7), **Sample 1 Size** (rozsah výběru pro 1. výběr (TAB) = 400), **Sample 2 Mean** (průměr pro 2. výběr (NIK) = 48,9), **Sample 2 Sigma** (výběrová směrodatná odchylka pro 2. výběr (NIK) = 4,3), **Sample 2 Size** (rozsah výběru pro 2. výběr (NIK) = 500))



Výstupem této procedury jsou opět dvě okna – textový a grafický výstup. Textový výstup nám nabízí intervalový odhad pro rozdíl (resp. poměr – v případě srovnávání směrodatných odchylek) testovaných parametrů (viz. předcházející cvičení) a výsledky testu, tj. **nulovou a alternativní hypotézu** (POZOR!!! Je zde přednastavená oboustranná alternativa, kterou musíme případně změnit v menu Analysis Option (RC na textový výstup) podle skutečné alternativy), **hodnotu testové statistiky za předpokladu, že platí nulová hypotéza** (pozorovaná hodnota) a **hodnotu p-value**. V textovém výstupu rovněž nalezneme **vyhodnocení testu pro příslušnou hladinu významnosti** (přednastavená hodnota je 5% - změnit ji můžeme v menu Analysis Option (RC na textový výstup)).

```
Hypothesis Tests
----------------
Sample means = 42,6 and 48,9
Sample standard deviations = 3,7 and 4,3
Sample sizes = 400 and 500

95,0% confidence interval for difference between means: -6,3 +/- 0,531754   [-6,83175;-5,76825]

Null Hypothesis: difference between means = 0,0
Alternative: not equal
Computed t statistic = -23,2209
P-Value = 0,0
Reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

(Equal variances assumed).


The StatAdvisor
---------------
   This analysis shows the results of performing a hypothesis test
concerning the difference between the means (mu1-mu2) of two samples
from normal distributions.  The two hypotheses to be tested are:

   Null hypothesis:        mu1-mu2 = 0,0
   Alternative hypothesis: mu1-mu2 <> 0,0

Given one sample of 400 observations with a mean of 42,6 and a
standard deviation of 3,7 and a second sample of 500 observations with
a mean of 48,9 and a standard deviation of 4,3, the computed t
statistic equals -23,2209.  Since the P-value for the test is less
than 0,05, the null hypothesis is rejected at the 95,0% confidence
level.  The confidence interval shows that the values of mu1-mu2
```

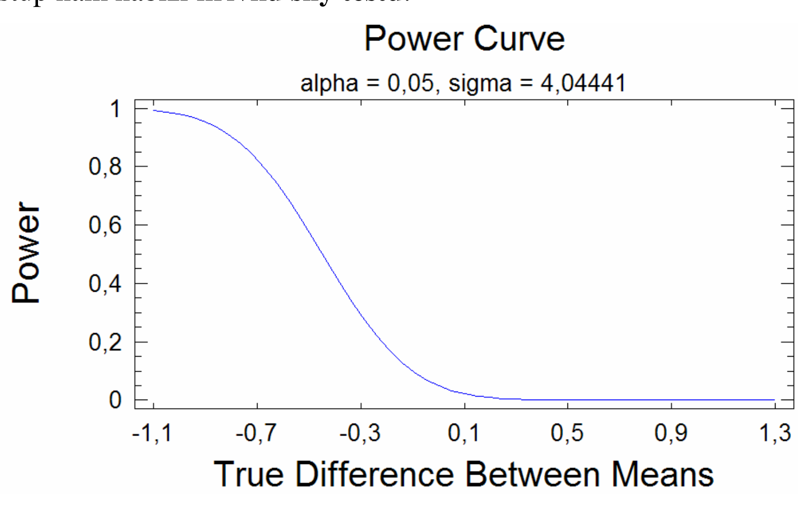


V našem případě je alternativní hypotéza ve tvaru „menší než“, proto v menu **Analysis Option** tvar alternativy změníme na **„Less Than“**.

```
Hypothesis Tests
----------------
Sample means = 42,6 and 48,9
Sample standard deviations = 3,7 and 4,3
Sample sizes = 400 and 500

95,0% upper confidence bound for difference between means: -6,3 + 0,446262   [-5,85374]

Null Hypothesis: difference between means = 0,0
Alternative: less than
Computed t statistic = -23,2209
P-Value = 0,0
Reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

(Equal variances assumed).


The StatAdvisor
---------------
   This analysis shows the results of performing a hypothesis test
concerning the difference between the means (mu1-mu2) of two samples
from normal distributions.  The two hypotheses to be tested are:

   Null hypothesis:        mu1-mu2 = 0,0
   Alternative hypothesis: mu1-mu2 < 0,0

Given one sample of 400 observations with a mean of 42,6 and a
standard deviation of 3,7 and a second sample of 500 observations with
a mean of 48,9 and a standard deviation of 4,3, the computed t
statistic equals -23,2209.  Since the P-value for the test is less
than 0,05, the null hypothesis is rejected at the 95,0% confidence
level.  The confidence bound shows that the values of mu1-mu2
```

P-value rovno cca 0 a proto můžeme nulovou hypotézu na 5% ní hladině významnosti zamítnout, tj. tvrzení firmy TAB lze považovat za pravdivé.

Grafický výstup nám nabízí **křivku síly testu**.



Pro konkrétní hodnotu alternativy zde můžeme odečíst pravděpodobnost zamítnutí nulové hypotézy (1-β).

11.9. Byly testovány magnetofony od dvou výrobců – SONIE a PHILL. SONIE prohlašuje, že jejich magnetofony mají nižší procento reklamací. Pro ověření tohoto prohlášení bylo dotazováno několik prodejců magnetofonů a bylo zjištěno, že ze 150 prodaných magnetofonů firmy SONIE bylo v průběhu záruční doby reklamováno 5 výrobků a ze 220 prodaných magnetofonů PHILL bylo v záruční době reklamováno 9 výrobků. Otestujte pravdivost prohlášení firmy SONIE čistým testem významnosti.

Řešení:

Chceme porovnávat procento (relativní četnost) reklamovaných výrobků u obou firem. Volíme tedy test hypotézy a rozdílu mezi podíly (relativními četnostmi).

Vstupní data: Výběr 1 – firma SONIE:

$$x_1 = 5$$
$$n_1 = 150$$
$$p_1 = \frac{5}{150} = 0{,}033$$

Výběr 2 – firma PHILL:

$$x_2 = 9$$
$$n_2 = 220$$
$$p_2 = \frac{9}{220} = 0{,}041$$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\pi_1 = \pi_2$ $(\pi_1 - \pi_2 = 0)$ (rovnovážný stav)
H_A: $\pi_1 < \pi_2$ $(\pi_1 - \pi_2 < 0)$
(výběry ukazují na to, že procento reklamovaných výrobků firmy SONIE je nižší než procento reklamovaných výrobků firmy PHILL)

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = P_2 = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{p \cdot (1-p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \to N(0;1), \qquad \text{kde } p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

Pokud je nulová hypotéza platná, platí, že: $\pi_1 = \pi_2$ $(\pi_1 - \pi_2 = 0)$, proto:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{5+9}{150+220} = \frac{14}{370} = 0{,}038$$

$$x_{OBS} = P_{2_{H_0}} = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)_{H_0}}{\sqrt{p \cdot (1-p) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(0{,}033 - 0{,}041) - (0)}{\sqrt{0{,}038 \cdot (1 - 0{,}038)\left(\frac{1}{150} + \frac{1}{220}\right)}} = -0{,}40$$

Výpočet p-value:

H_A: $\pi_1 < \pi_2$ $(\pi_1 - \pi_2 < 0)$ $\Rightarrow$

$$p - value = F_0(x_{OBS})$$
$$p - value = \Phi(-0{,}40) = 1 - \Phi(0{,}40)$$
$$p - value = 0{,}345 \qquad viz.\ \text{Tabulka 1}$$

Rozhodnutí:

$p - value > 0{,}05 \qquad \Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. tvrzení firmy SONIE není oprávněné.

Řešení ve Statgraphicsu:

Začneme opět tím, že si určíme parametry výběrů a stanovíme nulovou a alternativní hypotézu:

Vstupní data: Výběr 1 – firma SONIE:

$$x_1 = 5$$
$$n_1 = 150$$
$$p_1 = \frac{5}{150} = 0{,}033$$

Výběr 2 – firma PHILL:

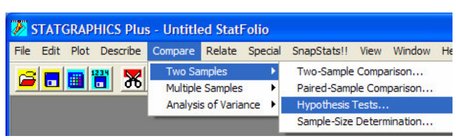
$$x_2 = 9$$
$$n_2 = 220$$
$$p_2 = \frac{9}{220} = 0{,}041$$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

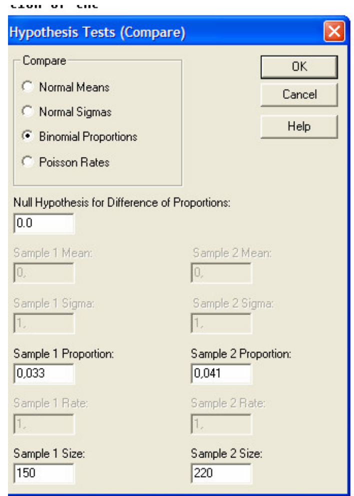
H_0: $\pi_1 = \pi_2$ $(\pi_1 - \pi_2 = 0)$ (rovnovážný stav)

H_A: $\pi_1 < \pi_2$ $(\pi_1 - \pi_2 < 0)$

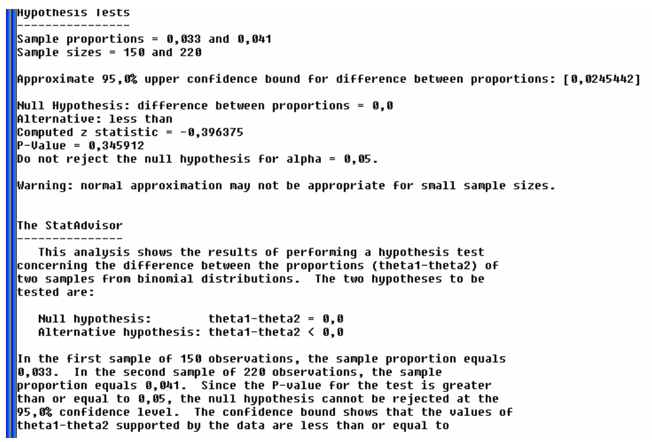
Chceme porovnávat střední hodnoty. V menu **Compare\Two Samples** zvolíme položku **Hypothesis Tests …**



V okně **Hypothesis Tests (Compare)** zaškrtneme pole **Binomial Proportion** a vyplníme požadované parametry – v poli **Null Hypothesis for Diference of Proportions** (nulová hypotéza pro rozdíl podílů) ponecháme 0, **Sample 1 Proportion** (výběrový podíl pro 1. výběr (SONIE) = 0,033), **Sample 1 Size** (rozsah výběru pro 1. výběr (SONIE) = 150), **Sample 2 Proportion** (výběrový podíl pro 2. výběr (PHILL) = 0,041), **Sample 2 Size** (rozsah výběru pro 2. výběr (PHILL) = 220)



V našem případě je alternativní hypotéza ve tvaru „menší než“, proto v menu **Analysis Option** tvar alternativy změníme na **„Less Than“**.



```
Hypothesis Tests
----------------
Sample proportions = 0,033 and 0,041
Sample sizes = 150 and 220

Approximate 95,0% upper confidence bound for difference between proportions: [0,0245442]

Null Hypothesis: difference between proportions = 0,0
Alternative: less than
Computed z statistic = -0,396375
P-Value = 0,345912
Do not reject the null hypothesis for alpha = 0,05.

Warning: normal approximation may not be appropriate for small sample sizes.


The StatAdvisor
---------------
   This analysis shows the results of performing a hypothesis test
concerning the difference between the proportions (theta1-theta2) of
two samples from binomial distributions.  The two hypotheses to be
tested are:

   Null hypothesis:        theta1-theta2 = 0,0
   Alternative hypothesis: theta1-theta2 < 0,0

In the first sample of 150 observations, the sample proportion equals
0,033.  In the second sample of 220 observations, the sample
proportion equals 0,041.  Since the P-value for the test is greater
than or equal to 0,05, the null hypothesis cannot be rejected at the
95,0% confidence level.  The confidence bound shows that the values of
theta1-theta2 supported by the data are less than or equal to
```

Rozhodnutí:

$p - value = 0{,}346 > 0{,}05 \qquad \Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. tvrzení firmy SONIE není oprávněné.

11.10. Máme dvě skupiny studentů. První (kontrolní), v níž jsou studenti vyučováni tradičními metodami, a druhá, v níž jsou studenti vyučováni experimentálními metodami. V následujících tabulkách je uvedeno bodové hodnocení vybraných studentů u zkoušky. Na základě srovnání mediánu rozhodněte, zda studenti vyučováni experimentálním metodami dosahují lepších výsledků než studenti s klasickým vyučováním.

Výběr z první skupiny (klasická výuka)

60	49	52	68	68
45	57	52	13	40
33	30	28	30	48

Výběr z druhé skupiny (experimentální výuka)

38	18	68	84	72
48	36	92	6	54

Řešení:

Volba nulové a alternativní hypotézy

H_0: $x_{0,5_1} = x_{0,5_2}$ $\quad \left(x_{0,5_1} - x_{0,5_2} = 0\right)$

H_A: $x_{0,5_1} \neq x_{0,5_2}$ $\quad \left(x_{0,5_1} - x_{0,5_2} \neq 0\right)$ $\quad (\tilde{x}_1 = 48; \tilde{x}_2 = 51)$

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = \mathrm{W}_2 = \frac{\overline{r_1} - \overline{r_2}}{s_r\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \to \mathrm{N}(0;1)$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

x_i	60	49	52	68	68	45	57	52	13	40	33	30	28	30	48
r_{i_1}	19	14	15,5	21	21	11	18	15,5	2	10	7	5,5	4	5,5	12,5

x_i	38	18	68	84	72	48	36	92	6	54
r_{i_2}	9	3	21	24	23	12,5	8	25	1	17

$$\overline{r_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{i_1}}{n_1} = 12{,}1; \qquad s_{r_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{i_1} - \overline{r}\right)^2}{n_1 - 1}} = 6{,}3;$$

$$\overline{r_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{i_2}}{n_2} = 14{,}4; \qquad s_{r_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{i_2} - \overline{r}\right)^2}{n_2 - 1}} = 8{,}9$$

$$s_r = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_{r_1}^{\ 2} + (n_2 - 1)s_{r_2}^{\ 2}}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{14\cdot(6{,}3)^2 + 9\cdot(8{,}9)^2}{15 + 10 - 2}} = 7{,}4$$

$$x_{OBS} = \mathrm{W}_{2_{\mathrm{H}_0}} = \frac{\overline{r_1} - \overline{r_2}}{s_r\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{12{,}1 - 14{,}4}{7{,}4\cdot\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{10}}} = (-0{,}76)$$

Výpočet p-value:

H_A: $x_{0,5_1} \neq x_{0,5_2}$ $\quad \left(x_{0,5_1} - x_{0,5_2} \neq 0\right) \quad \Rightarrow$

$$p-value = 2.\min\{F_0(x_{OBS});1-F_0(x_{OBS})\}$$
$$F_0(x_{OBS}) = \Phi(-0{,}76) = 1-\Phi(0{,}76) = 1-0{,}776 = 0{,}224$$
$$1-F_0(x_{OBS}) = 1-\Phi(-0{,}76) = \Phi(0{,}76) = 0{,}776$$
$$p-value = 2.0{,}224 = 0{,}448$$

Rozhodnutí:

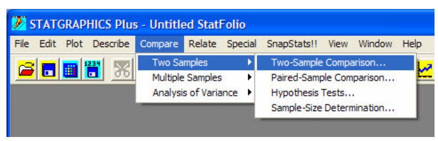
$p-value > 0{,}05 \qquad \Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tzn. nebyl potvrzen vliv typu výuky na výsledky studentů zkoušky.

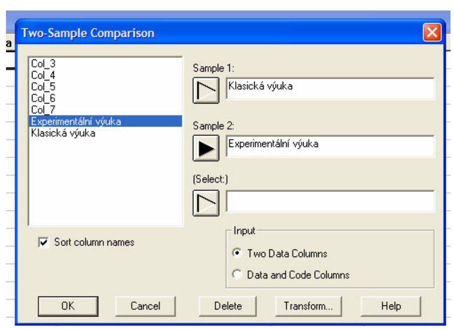
Řešení ve Statgraphicsu:

Nejdříve data zadáme do Statgraphicsu, resp. použijeme připravený datový soubor Vyuka.sf3

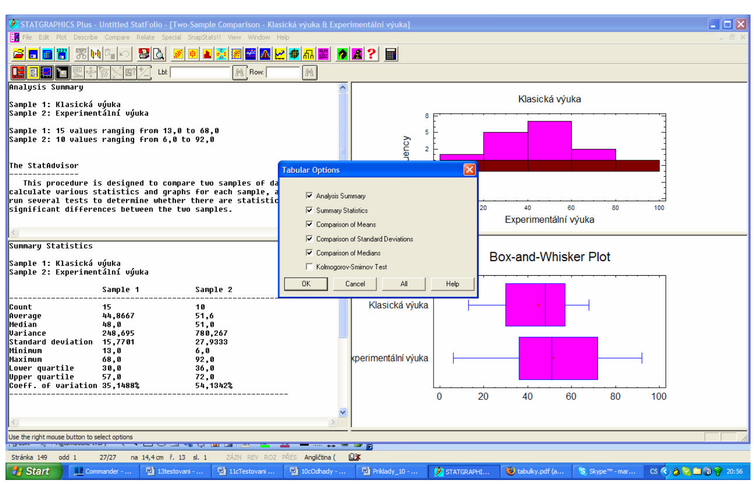
Menu **Compare\Two Samples\ Two Samples Comparison …**

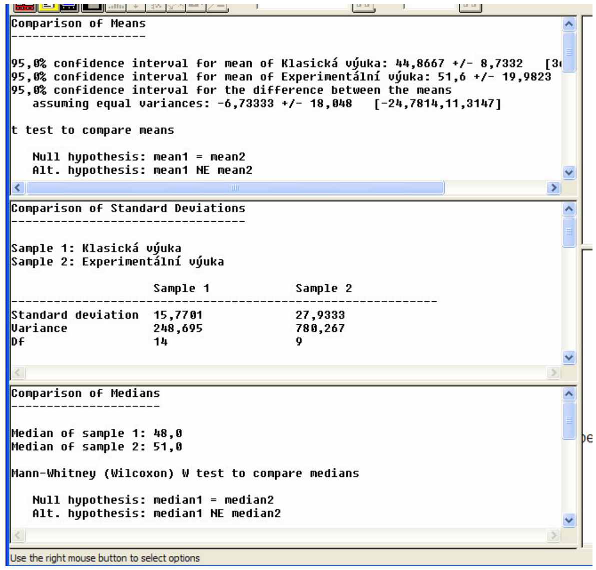


Jako výběr 1 zadáme body studentů z Klasické výuky, jako výběr 2 zadáme body studentů z Experimentální výuky.



Statgraphics nám umožňuje porovnat střední hodnoty, směrodatné odchylky a mediány. Typ porovnávání vybereme klikneme-li na **ikonu Tabular Option**



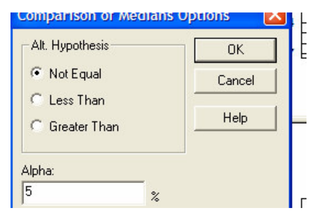


```
Comparison of Means
-------------------

95,0% confidence interval for mean of Klasická výuka: 44,8667 +/- 8,7332   [3
95,0% confidence interval for mean of Experimentální výuka: 51,6 +/- 19,9823
95,0% confidence interval for the difference between the means
   assuming equal variances: -6,73333 +/- 18,048   [-24,7814,11,3147]

t test to compare means

   Null hypothesis: mean1 = mean2
   Alt. hypothesis: mean1 NE mean2

Comparison of Standard Deviations
---------------------------------

Sample 1: Klasická výuka
Sample 2: Experimentální výuka

                    Sample 1            Sample 2
------------------------------------------------------------
Standard deviation  15,7781             27,9333
Variance            248,695             780,267
Df                  14                  9

Comparison of Medians
---------------------

Median of sample 1: 48,0
Median of sample 2: 51,0

Mann-Whitney (Wilcoxon) W test to compare medians

   Null hypothesis: median1 = median2
   Alt. hypothesis: median1 NE median2

Use the right mouse button to select options
```

Nulovou hypotézu pro rozdíl (resp. poměr - v případě porovnávání směrodatných odchylek) příslušných parametrů, alternativní hypotézu a hladinu významnosti zadáme v menu **Pane Option** (RC na příslušný textový výstup).

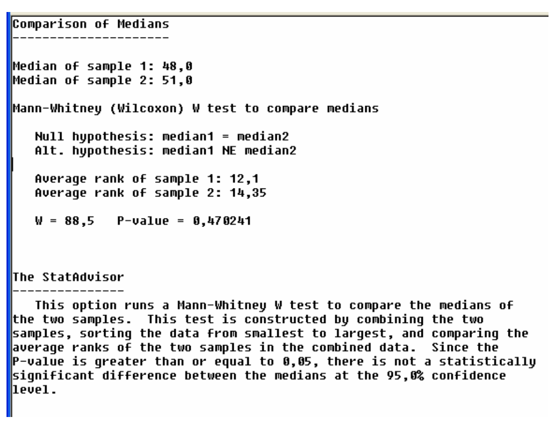
Nás zajímá porovnání mediánů, provedeme tedy RC na textový výstup vztahující se k porovnávání mediánů a nastavíme nulovou hypotézu, alternativní hypotézu a hladinu významnosti:

Volba nulové a alternativní hypotézy



H_0: $\quad x_{0,5_1} = x_{0,5_2} \qquad (x_{0,5_1} - x_{0,5_2} = 0)$

H_A: $\quad x_{0,5_1} \neq x_{0,5_2} \qquad (x_{0,5_1} - x_{0,5_2} \neq 0)$



```
Comparison of Medians
---------------------

Median of sample 1: 48,0
Median of sample 2: 51,0

Mann-Whitney (Wilcoxon) W test to compare medians

   Null hypothesis: median1 = median2
   Alt. hypothesis: median1 NE median2

   Average rank of sample 1: 12,1
   Average rank of sample 2: 14,35

   W = 88,5   P-value = 0,470241


The StatAdvisor
---------------
   This option runs a Mann-Whitney W test to compare the medians of
the two samples.  This test is constructed by combining the two
samples, sorting the data from smallest to largest, and comparing the
average ranks of the two samples in the combined data.  Since the
P-value is greater than or equal to 0,05, there is not a statistically
significant difference between the medians at the 95,0% confidence
level.
```

Rozhodnutí:

$p - value = 0{,}470 > 0{,}05 \qquad \Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tzn. nebyl potvrzen vliv typu výuky na výsledky studentů zkoušky.

11.11. Máme k dispozici údaje o tepové frekvenci pacientů v klidu a po 10 minutách cvičení. Rozhodněte na základě porovnání středních hodnot a mediánů tepových frekvencí, zda se 10 minutové cvičení projeví na tepové frekvenci pacientů.

Klidová frekvence X_1	**42**	**173**	**113**	**115**	**69**	**101**	**94**	**93**	**112**	**67**	**104**	**76**
Frekvence po cvičení X_2	**52**	**175**	**147**	**83**	**123**	**119**	**69**	**123**	**82**	**57**	**100**	**89**

Řešení:

Zcela zřejmě se jedná o závislé výběry, proto použijeme párové testy.

Klidová frekvence x_1	42	173	113	115	69	101	94	93	112	67	104	76
Frekvence po cvičení x_2	52	175	147	83	123	119	69	123	82	57	100	89
$d = x_2 - x_1$	10	2	34	-32	54	18	-25	30	-30	-10	-4	13

Párový test střední hodnoty:

Vstupní data: Výběr: $\bar{d} = 5{,}0$

$s_d = 26{,}9$

$n = 12$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $\mu = 0$ (rovnovážný stav, cvičení tepovou frekvenci neovlivnilo)

H_A: $\mu > 0$ (výběr ukazuje na to, že cvičení tepovou frekvenci zvýšilo (5 > 0))

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = T_{n-1} = \frac{\overline{X} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n} \to t_{n-1}$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

$$x_{OBS} = T_{11_{H_0}} = \frac{\bar{d} - \mu_0}{s_d} \cdot \sqrt{n} = \frac{5{,}0 - 0}{26{,}9} \cdot \sqrt{12} = 0{,}64$$

Výpočet p-value:

H_A: $\mu > 0 \Rightarrow$

$$p - value = 1 - F_0(x_{OBS})$$
$$p - value = 1 - F_0(0{,}64)$$
$$0{,}25 < F_0(3{,}54) < 0{,}75$$ viz. Tabulka 2 (Studentovo rozdělení, 11 stupňů volnosti)
$$0{,}75 > p - value > 0{,}25$$

Rozhodnutí:

$p - value > 0{,}05 \qquad \Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. z hlediska střední hodnoty můžeme vliv 10 minutového cvičení považovat za nevýznamný.

Párový test mediánu:

Vstupní data: Výběr: $\tilde{x} = 6{,}0$

Stanovení nulové a alternativní hypotézy:

H_0: $x_{0,5} = 0$ (rovnovážný stav, cvičení tepovou frekvenci neovlivnilo)

H_A: $x_{0,5} > 0$ (výběr ukazuje na to, že cvičení tepovou frekvenci zvýšilo (6 > 0))

Znaménkový test:

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = Y \to Bi(n;0{,}5),$$

Y … počet pozorování v náhodném výběru o rozsahu n, které překročí $x_{0,5_0}$ (=0)

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

d = $x_2 - x_1$	10	2	34	-32	54	18	-25	30	-30	-10	-4	13

$x_{OBS} = Y_{H_0} = 7$ (ve výběru je 7 hodnot vyšších než 0)

Výpočet p-value:

H_A: $x_{0,5} > 0 \qquad \Rightarrow$

$$p - value = 1 - F_0(x_{OBS})$$

$$Y \to Bi(12;0{,}5)$$

$$p - value = 1 - F_0(7) = 1 - P(Y < 7) = P(Y \geq 7) = \sum_{k=7}^{12} \binom{10}{k} \cdot (0{,}5)^k \cdot (1 - 0{,}5)^{10-k}$$

$$p - value = 0{,}387$$

Wilcoxonův test

Volba testového kritéria a stanovení jeho nulového rozdělení:

$$T(\underline{X}) = W = \frac{\overline{r^*}}{s_{r^*}} \cdot \sqrt{n} \to N(0;1),$$

Výpočet hodnoty testové statistiky – x_{OBS}:

Vstupní data postupně transformujeme na proměnnou r^* a z ní vypočteme hodnotu testové statistiky:

$$y_i = \left|x_i - x_{0,5_0}\right| \qquad \left(x_{0,5_0} = 100\right),$$
$$r_i = rank(y_i),$$
$$r_i^* = r_i \cdot \operatorname{sgn}\left(x_i - x_{0,5_0}\right)$$

d	**Seřazené hodnoty d**	$y_i = \left|d_i - 0\right|$	$r_i = rank(y_i)$	$r_i^* = r_i \cdot \operatorname{sgn}\left(x_i - x_{0,5_0}\right)$
10	-32	32	10	-10
2	-30	30	8,5	-8,5
34	-25	25	7	-7
-32	-10	10	3,5	-3,5
54	-4	4	2	-2
18	2	2	1	1
-25	10	10	3,5	3,5
30	13	13	5	5
-30	18	18	6	6
-10	30	30	8,5	8,5
-4	34	34	11,5	11,5
13	54	34	11,5	11,5

$$\overline{r^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^*}{12} = 1{,}3, \qquad s_{r^*} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_i^* - \bar{r}\right)^2}{11}} = 7{,}6$$

$$x_{OBS} = W_{H_0} = \left(\frac{\overline{r^*}}{s_{r^*}} \cdot \sqrt{n}\right)_{H_0} = \frac{1{,}3}{7{,}6} \cdot \sqrt{12} = 0{,}59$$

Výpočet p-value:

H_A: $x_{0,5} > 0 \quad \Rightarrow \quad p - value = 1 - F_0(x_{OBS})$

$$p - value = 1 - \Phi(0{,}59) = 1 - \Phi(1{,}32) = 1 - 0{,}722 = 0{,}278$$

Rozhodnutí:

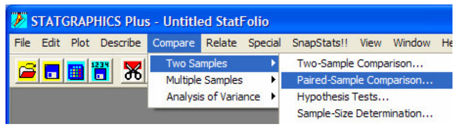
Jak pro znaménkový test, tak pro Wilcoxonův test je $p - value > 0{,}05 \quad \Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. z hlediska mediánu můžeme vliv 10 minutového cvičení považovat za nevýznamný. Blízkost p-value pro t test a pro testy mediánu ukazuje na nepřítomnost odlehlých pozorování.

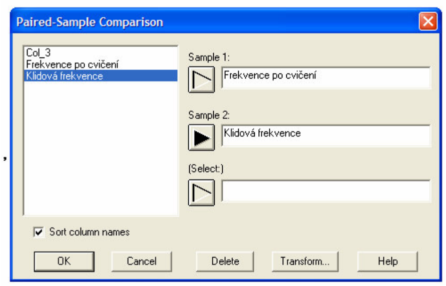
Řešení ve Statgraphicsu:

Nejdříve data zadáme do Statgraphicsu, resp. použijeme připravený datový soubor Frekvence.sf3

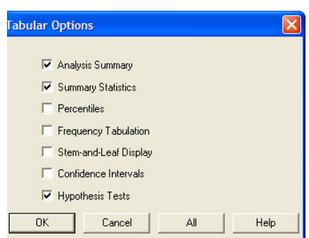
Menu **Compare\Two Samples\ Paired - Sample Comparison …**



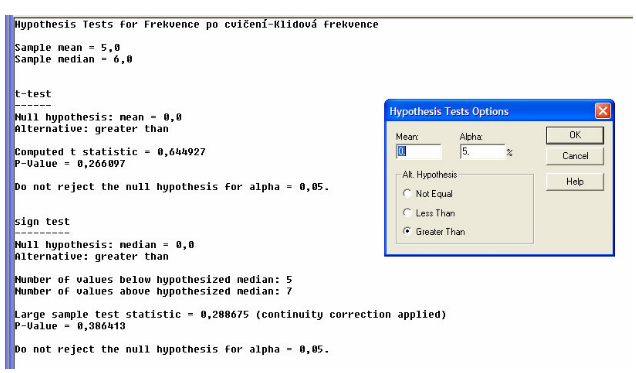
V okně Paired-Sample Comparison zadáme jako výběr 1 Frekvenci po cvičení a jako výběr 2 Klidovou frekvenci (počáteční stav).



Statgraphics nám umožňuje provést párové testy středních hodnot a mediánů. Klikneme na **ikonu Tabular Option** a zvolíme **položku Hypothesis Thests.**



Nulovou hypotézu pro rozdíl příslušných parametrů, alternativní hypotézu a hladinu významnosti zadáme v menu **Pane Option** (RC na příslušný textový výstup).



Párový test střední hodnoty:

Rozhodnutí:

$p - value = 0{,}266 > 0{,}05 \qquad \Rightarrow$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. z hlediska střední hodnoty můžeme vliv 10 minutového cvičení považovat za nevýznamný.

Párový test mediánu:

Znaménkový test:

$p - value = 0{,}386$

Nezamítáme nulovou hypotézu, tj. z hlediska mediánu můžeme vliv 10 minutového cvičení považovat za nevýznamný.