

6 Vybraná rozdělení spojité náhodné veličiny

Rovnoměrné rozdělení $Ro(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in \langle a; b \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení $Exp(\lambda)$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

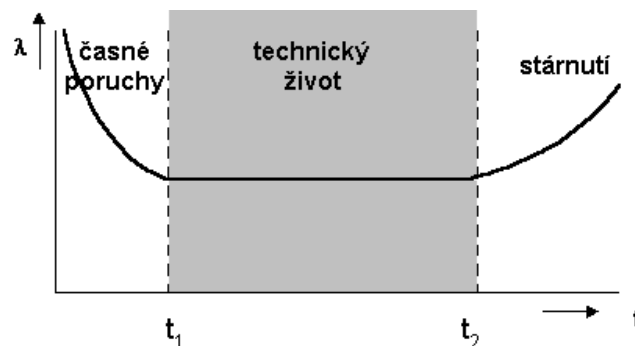
Pomocí exponenciálního rozdělení můžeme modelovat čas mezi dvěma po sobě jdoucími událostmi v Poissonově procesu.

Poissonův proces (opakování)

- definovaný na uzavřeném intervalu (čas, plocha, objem)
- rychlost výskytu událostí λ (konstantní!!)
- pravděpodobnost výskytu více událostí v limitně krátkém intervalu je nulová
- pravděpodobnost výskytu události nezávisí na tom, kdy došlo k poslední události

Intenzita poruch (hazardní funkce)

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$



Význam intenzity poruch: Předpokládáme, že náhodná veličina X udává dobu do 1. poruchy nějakého zařízení. Jestliže až do času t nedošlo k žádné poruše, pravděpodobnost, že k ní dojde v následujícím krátkém úseku Δt , je přibližně $\lambda(t) \cdot \Delta t$.

Intenzita poruch exponenciálního rozdělení:

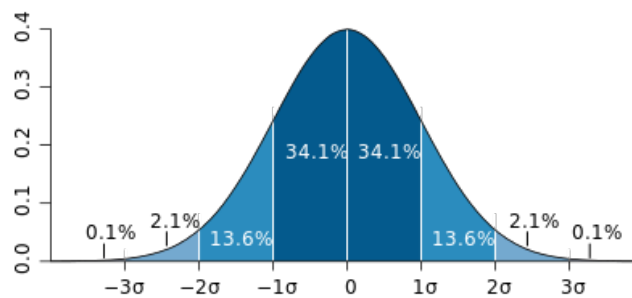
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \lambda \text{ (konstantní, viz Poissonův proces)}$$

Weibullovo rozdělení $W(\Theta, \beta)$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{\beta}{\Theta} \left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^\beta} & t > 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^\beta} & t > 0 \end{cases}$$

- vhodná volba parametrů Θ a β umožňuje modelování náhodné veličiny „doba do 1. poruchy“ v libovolném období intenzity poruch
- pro $\Theta = \frac{1}{\lambda}$, $\beta = 1$ dostaneme exponenciální rozdělení (modelování náhodné veličiny „doba do 1. poruchy“ v období stabilního života)

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$



- v intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ leží přibližně 68% hodnot
- v intervalu $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ leží přibližně 95% hodnot, apod.

Standardizace normálního rozdělení (převod na normované normální)

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} \quad F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} dt$$

Normované normální rozdělení $N(0, 1)$:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \text{ (díky symetrii)}$$

Převodní vztah:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$