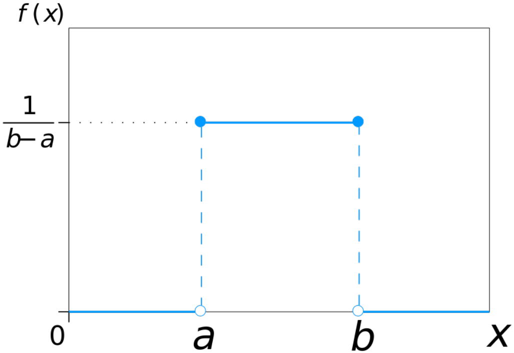
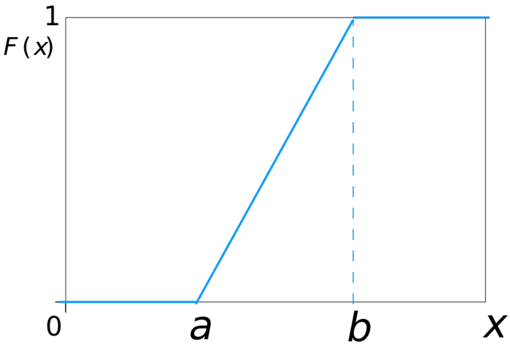
Pravděpodobnost a statistika - cvičení 6

Vybraná rozdělení spojité náhodné veličiny

Simona Domesová
http://homel.vsb.cz/~dom0015

Rovnoměrné rozdělení $Ro\,(a, b)$

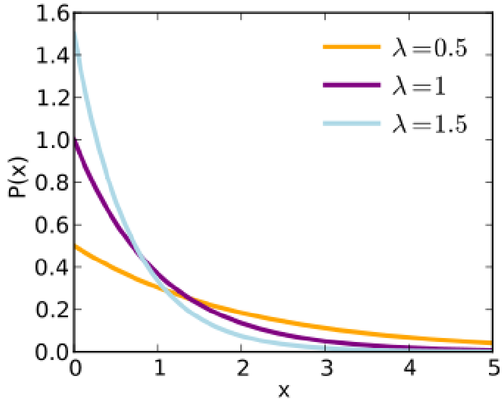


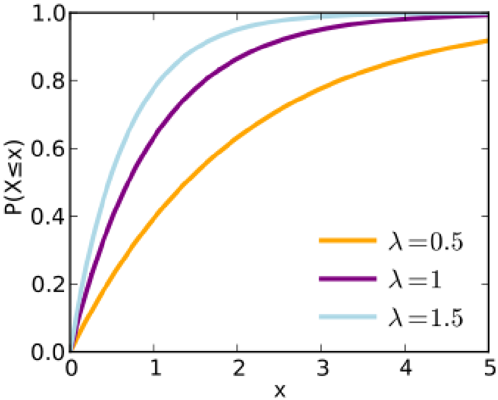


$$f\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in \langle a; b \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$F\,(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení $Exp\,(\lambda)$





$$f\,(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

$$F\,(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení $Exp\,(\lambda)$

$$f\,(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases} \qquad\qquad F\,(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

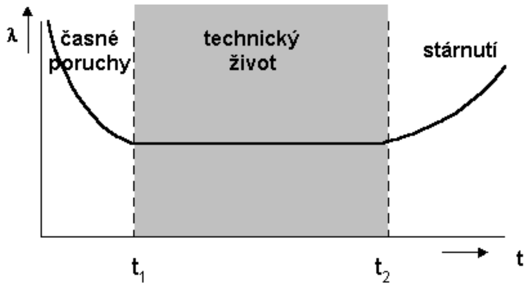
Pomocí exponenciálního rozdělení můžeme modelovat čas mezi dvěma po sobě jdoucími událostmi v Poissonově procesu.

Poissonův proces (opakování)

- definovaný na uzavřeném intervalu (čas, plocha, objem)
- rychlost výskytu událostí λ (konstantní!!)
- pravděpodobnost výskytu více událostí v limitně krátkém intervalu je nulová
- pravděpodobnost výskytu události nezávisí na tom, kdy došlo k poslední události

Intenzita poruch (hazardní funkce)

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

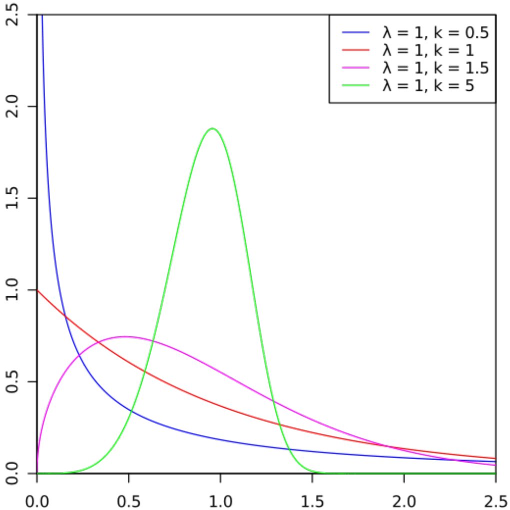


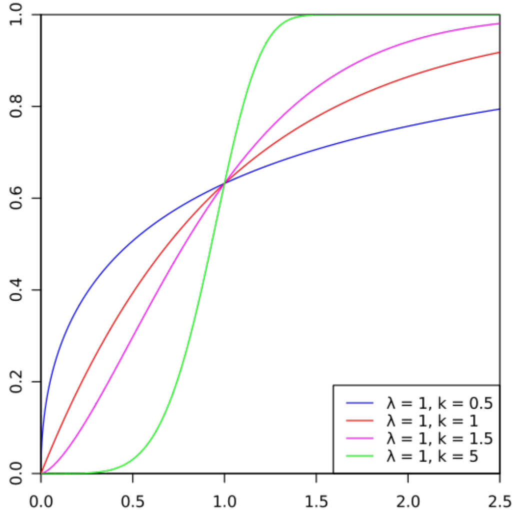
Význam intenzity poruch: Předpokládáme, že náhodná veličina X udává dobu do 1. poruchy nějakého zařízení. Jestliže až do času t nedošlo k žádné poruše, pravděpodobnost, že k ní dojde v následujícím krátkém úseku Δt, je přibližně $\lambda(t) \cdot \Delta t$.

Intenzita poruch exponenciálního rozdělení:

$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t}}{1-(1-e^{-\lambda t})} = \lambda$ (konstantní, viz Poissonův proces)

Weibullovo rozdělení $W(\Theta, \beta)$





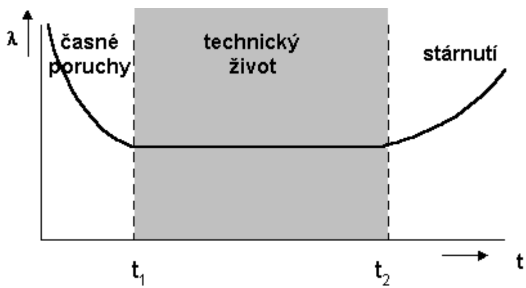
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}} & t > 0 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}} & t > 0 \end{cases}$$

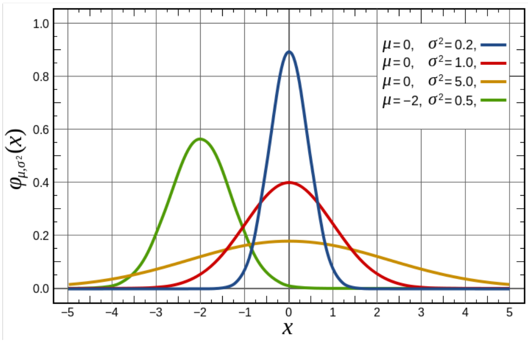
Weibullovo rozdělení $W(\Theta, \beta)$

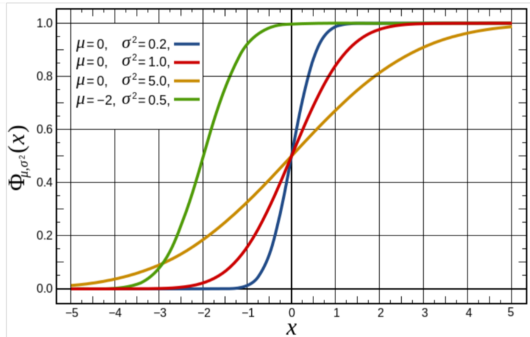
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}} & t > 0 \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^{\beta}} & t > 0 \end{cases}$$

- vhodná volba parametrů Θ a β umožňuje modelování náhodné veličiny „doba do 1. poruchy“ v libovolném období intenzity poruch
- pro $\Theta = \frac{1}{\lambda}$, $\beta = 1$ dostaneme exponenciální rozdělení (modelování náhodné veličiny „doba do 1. poruchy“ v období stabilního života)



Normální rozdělení $N\left(\mu, \sigma^2\right)$

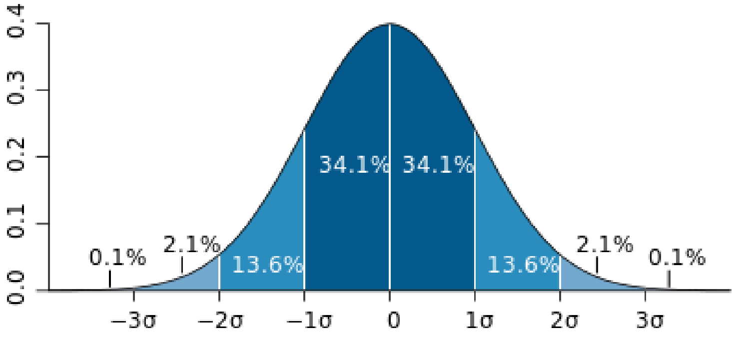




$$f\left(t\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma\cdot\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$F\left(t\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma\cdot\sqrt{2}}\right)^2} \mathrm{d}t$$

Normální rozdělení $N\left(\mu, \sigma^2\right)$



$$f\left(t\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma\cdot\sqrt{2}}\right)^2}$$

- v intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ leží přibližně 68% hodnot
- v intervalu $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ leží přibližně 95% hodnot, apod.

Standardizace normálního rozdělení (převod na normované normální)

Normální rozdělení $N\left(\mu, \sigma^2\right)$:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma\cdot\sqrt{2}}\right)^2} \qquad F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma\cdot\sqrt{2}}\right)^2} \mathrm{d}t$$

Normované normální rozdělení $N(0,1)$:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ (díky symetrii)

Převodní vztah:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$