Pravděpodobnost a statistika - cvičení 3

Náhodná veličina

Simona Domesová
http://homel.vsb.cz/~dom0015

Náhodná veličina = funkce, která každému elementárnímu jevu přiřadí reálné číslo (elementárnímu jevu $\omega \in \Omega$ přiřadíme reálné číslo $X(\omega)$)

- hod kostkou: $[\cdot] \longrightarrow 1$, $[\cdot\,\cdot] \longrightarrow 2$, $[\cdot\cdot\cdot] \longrightarrow 3$, atd.
- náhodně vybraná osoba: např. muž $\longrightarrow 0$, žena $\longrightarrow 1$
- doba trvání simulace: např. pět a půl minuty $\longrightarrow 5.5$

Rozdělení pravděpodobnosti úplně popisuje náhodnou veličinu

Způsoby popisu rozdělení pravděpodobnosti:

<table>
<tr><th>diskrétní NV</th><th>spojitá NV</th></tr>
<tr><td colspan="2">distribuční funkce $F(t)$:
$F(t) = P(X < t)$</td></tr>
<tr><td>$F(t) = \sum_{x_i < t} P(x_i)$
lze zadat předpisem, tabulkou, grafem</td><td>$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$
je spojitá</td></tr>
<tr><td>pravděpodobnostní funkce $P(x)$:
$P(x_i) = P(X = x_i)$
lze zadat předpisem, tabulkou, grafem</td><td>hustota pravděpodobnosti $f(x)$:
$f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$
„obálka histogramu“</td></tr>
</table>

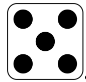
Číselné charakteristiky diskrétní/spojité náhodné veličiny

diskrétní NV	**spojitá NV**
střední hodnota: $E(X) = \mu = \sum_i x_i P(x_i)$	**střední hodnota:** $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
rozptyl: $D(X) = \sigma^2 = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$	
směrodatná odchylka: $\sigma = \sqrt{D(X)}$	
modus $\widehat{x}$: hodnota NV, ve které pravděpodobnostní funkce nabývá svého maxima	**modus $\widehat{x}$:** hodnota NV, ve které hustota pravděpodobnosti nabývá svého maxima
	p-kvantil: hodnota x_p, pro kterou platí $P(X < x_p) = p$

Důležité vztahy $(a, b \in \mathbb{R})$**:**

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= aE(X) + b \\ E(X + Y) &= E(X) + E(Y) \\ D(aX + b) &= a^2 D(X) \end{aligned}$$

Příklad 1 (Diskrétní náhodná veličina)

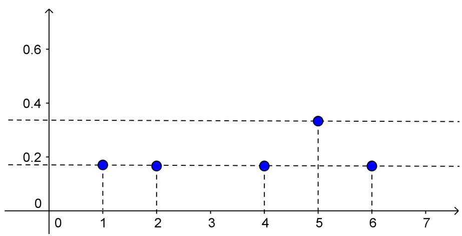
Na hrací kostce překreslíme  na . Hod touto kostkou budeme modelovat pomocí náhodné veličiny. Určete její pravděpodobnostní funkci a distribuční funkci.

---

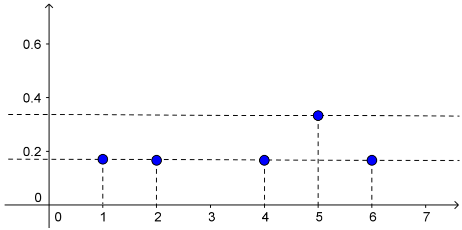
náhodný pokus ... hod falešnou kostkou
náhodná veličina ... číslo odpovídající hozené hodnotě
pravděpodobnostní funkce:

$$P(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{6} & k\in\{1,2,4,6\}\\ \frac{2}{6} & k=5\\ 0 & k\notin\{1,2,4,5,6\}\end{cases}$$

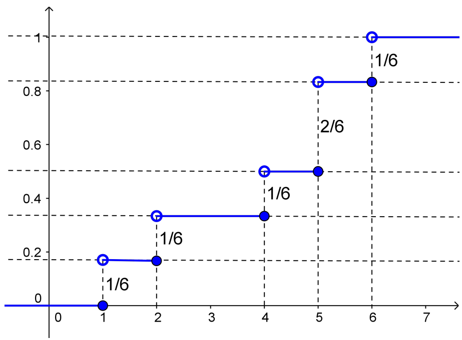
k	1	2	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$



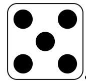
pravděpodobnostní funkce:



distribuční funkce:

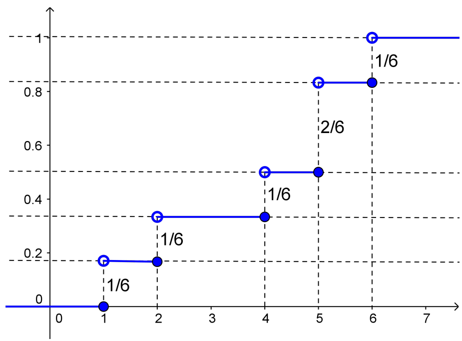


Příklad 1 (Diskrétní náhodná veličina)

Na hrací kostce překreslíme  na . Hod touto kostkou budeme modelovat pomocí náhodné veličiny. Určete její pravděpodobnostní funkci a distribuční funkci.

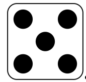
---

distribuční funkce:



x	$(-\infty;1\rangle$	$(1;2\rangle$	$(2;4\rangle$	$(4;5\rangle$	$(5;6\rangle$	$(6;\infty)$
$F(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

Příklad 1 (Diskrétní náhodná veličina)

Na hrací kostce překreslíme  na . Hod touto kostkou budeme modelovat pomocí náhodné veličiny. Určete její pravděpodobnostní funkci a distribuční funkci.

---

distribuční funkce:

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1\rangle \\ \frac{1}{6} & x \in (1; 2\rangle \\ \frac{1}{3} & x \in (2; 4\rangle \\ \frac{1}{2} & x \in (4; 5\rangle \\ \frac{5}{6} & x \in (5; 6\rangle \\ 1 & x \in (6; \infty) \end{cases}$$

x	$(-\infty; 1\rangle$	$(1; 2\rangle$	$(2; 4\rangle$	$(4; 5\rangle$	$(5; 6\rangle$	$(6; \infty)$
$F\left(x\right)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	1