RMA - příklady z tematických okruhů 2

Úkolem je příklady nejen vyřešit, ale především umět vysvětlit jednotlivé kroky použité při řešení.

Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí:

Příklad 1. Buď pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n definovaná předpisem

$$f_n(x) := \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

Rozhodněte, zda je posloupnost funkcí (f_n) bodově, resp. stejnoměrně konvergentní na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Diferenciál funkcí jedné i vice proměnných, implicitní funkce:

Příklad 2. Určete druhý a třetí totální diferenciál funkce $f : z = \ln(x + y)$ v bodě $(2, 1)$.

Příklad 3. Ověřte, že rovnice

$$y^2 (2 - x) = x^2$$

zadává v okolí bodu $A = (1, -1)$ implicitně jedinou funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Vypočtěte její první derivaci a napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě A.

Tečné roviny grafu funkce dvou proměnných, gradient,vrstevnice:

Příklad 4. Najděte rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $f : z = x \cdot \exp(3x + 2y)$ v bodě $(-2, 3, ?)$.

Příklad 5. Určete největší spád grafu funkce $f : z = \sqrt{xy}$ v bodě $(4, 2, ?)$.

Lokální, globální a vázané extrémy, Lagrangeovy multiplikátory:

Příklad 6. Najděte lokální extrémy funkce

$$z = x^4 - 3x^2 y + 3y - y^3.$$

Příklad 7. Kladné číslo a rozložte na součin čtyř kladných čísel tak, aby jejich součet byl minimální.

Příklad 8. Najděte vázané lokální extrémy funkce $f : z = x + y + 2$ při podmínce $2\left(x^2 + y^2\right) = x^2 y^2$.

Taylorův polynom a jeho aplikace.

Příklad 9. Napište Taylorův mnohočlen druhého řádu funkce $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ se středem $(1, 1)$.

Příklad 10. Pomocí Taylorovy věty vypočtěte přibližně (s chybou menší než 10^{-4}) hodnotu $\sqrt{\pi}$.

Dvojný a trojný Riemannův integrál:

Příklad 11. Pomocí Fubiniovy věty vypočtěte

$$\iiint_M xy^2 z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

Příklad 12. Pomocí transformace dvojného integrálu řeště

$$\iint_M xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$