

RMA - příklady z tematických okruhů 1

Úkolem je příklady nejen vyřešit, ale především umět vysvětlit jednotlivé kroky použité při řešení.

Základy teorie množin, mohutnost množiny, matematická indukce:

Příklad 1. Dokažte matematickou indukcí, že číslo $2n^2 + 2n$ je dělitelné čtyřmi $\forall n \in \mathbb{N}$.

Reálná čísla, supremum, infimum:

Příklad 2. Určete (pokud existuje) minimum, maximum, infimum a supremum množiny

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \wedge \sin x < \frac{1}{2} \right\}.$$

Posloupnosti a jejich limity:

Příklad 3. Vypočtěte

$$\lim \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^{2n+\frac{2}{3}}.$$

Příklad 4. Vypočtěte

$$\lim \left(\frac{\sqrt{7n^3+1} - n}{81 + 7n\sqrt{n}}, \frac{3^{2n+4} - 4^{n+1}}{2^{n+1} - 3^{2n} + 4^n} \right).$$

Limita a spojitost funkcí jedné i více proměnných:

Příklad 5. Určete a znázorněte definiční obor funkce

$$f(x, y) := \arcsin \frac{x}{y} + \ln(xy^2 + y^2).$$

Příklad 6. Rozhodněte, zda jsou funkce f a f' spojité:

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

Příklad 7. Vypočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg} x}.$$

Příklad 8. Vyšetřete limitu funkce

$$f(x, y) := \frac{2xy}{xy + 2x - y}$$

v bodech $(1, 1)$ a $(-1, -1)$.

Příklad 9. Vypočtěte

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Derivace funkcí jedné a více proměnných:

Příklad 10. Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) := \sqrt{x^2 + 16}$ procházející bodem $(3, ?)$.

Příklad 11. Vypočtěte první a druhé parciální derivace funkce

$$f(x, y) := \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Příklad 12. Vypočtěte derivaci funkce $f(x, y) := x^2 - 3xy - 2y^2$ v bodě $(-1, 1)$ ve směru $(2, -1)$.