RMA – konzultace 23.9.2016

VÝROKOVÁ LOGIKA

- pojmy: výrok, tautologie, kontradikce, výroková forma, kvantifikovaný výrok ($\forall\ \exists\ \exists!$) a jeho negace
- operace $\neg\ \wedge\ \vee\ \Rightarrow\ \Leftrightarrow$
- obměna implikace vs. obrácení implikace
- tabulka pravdivostních hodnot
- typy důkazů

přímý: $(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow C)$

nepřímý: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

sporem: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [\neg(\neg B \wedge A)]$

PŘ ověřte tyto ekvivalence pomocí tabulky pravdivostních hodnot

PŘ obor pravdivosti P výrokové formy $V(x)$

$\forall x \in U: V(x)$ ... $U \subset P$

$\exists x \in U: V(x)$ ... $U \cap P \neq \emptyset$

$\exists! x \in U: V(x)$ ... $U \cap P$ je jednoprvková množina

PŘ nelze zaměnit pořadí kvantifikátorů

$(\forall x \in R)(\exists y \in R): x + y = 10$ ... platí

$(\exists y \in R)(\forall x \in R): x + y = 10$ ... neplatí

MATEMATICKÁ INDUKCE

- tvrzení platí pro $n_0 \in N$
- platí-li tvrzení pro $n = m \in N$, pak platí i pro $n = m+1$

} tvrzení platí $\forall n \geq n_0$, $n \in N$

PŘ dokažte, že $n^3 + 2n$ je dělitelné třemi $\forall n \in N$

- první krok ($n = 1$): $n^3 + 2n = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ ✓ platí (je dělitelné třemi)
- indukční krok – předpokládáme, že $m^3 + 2m$ je dělitelné třemi

$(n = m+1)$: $(m+1)^3 + 2(m+1) = \dots = (m^3 + 2m) + 3(m^2 + m + 1)$

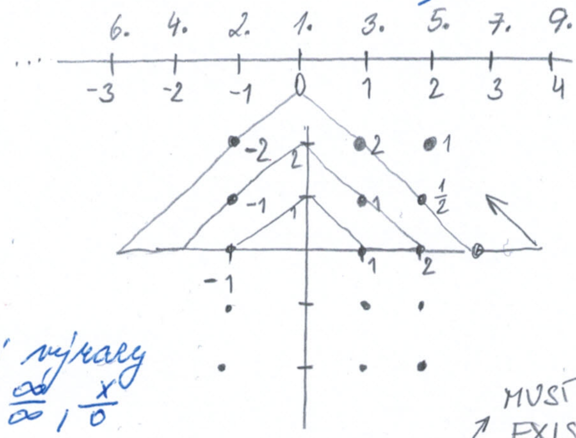
✓ platí (při splnění indukčního předpokladu dělitelné č. 3)

$\Rightarrow$ tvrzení platí $\forall n \in N$

ČÍSELNÉ MNOŽINY $N \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset R$, MOHUTNOST

- N, mat. indukce (na předchozí straně)
- $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in N} \{n, -n, 0\}$ ... lze „očíslovat" přirozenými čísly
- $Q = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \}$ ... —||—

} spočetné množiny



PŘ neexistuje $p \in Q : p^2 = 2$
důkaz sporem viz MA1 - p.1

- R nespočetná; R^+, R^-, R^*
  ↳ nedefinované výrazy
  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{x}{0}$

MNOŽINY

- pojmy: horní odhad, maximum, supremum,
  dolní odhad, minimum, infimum

supremum → NEJMENŠÍ HORNÍ ODHAD → MUSÍ VŽDY EXISTOVAT

maximum → KTERÝ NAVÍC LEŽÍ V MNOŽINĚ → NEMUSÍ EXISTOVAT

- věta o supremu

⊛ $\inf \emptyset = +\infty \qquad \sup \emptyset = -\infty$

⊛ $\langle a_1, b_1 \rangle \supset \langle a_2, b_2 \rangle \supset \cdots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n \rangle \neq \emptyset$

DŮKAZ: $\alpha = \sup \{ a_1, a_2, \dots \}$ - musí existovat, $\forall n : a_n \leq \alpha$
b_n jsou také horní odhady $\Rightarrow \forall n : \alpha \leq b_n$ } $\forall n : \alpha \in \langle a_n, b_n \rangle$

⊛ spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina

⊛ nechť A je spočetná, pak $A \times A$ je spočetná

⊛ $A = (3, 5\rangle$ ... nespočetná, infimum = 3, supremum = 5,
minimum neexistuje, maximum = 5

⊛ dokažte $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ ... za jakých předpokladů by platilo?

princip důkazu: $(M_1 = M_2) \Leftrightarrow (M_1 \subset M_2) \wedge (M_2 \subset M_1)$

LIMITA POSLOUPNOSTI

- posloupnost (reálných čísel) = funkce, jejímž definičním oborem je $\mathbb{N}$
- zápis $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo (a_n)
- definice limity viz MA1 – p.4
- konvergentní posloupnost = má konečnou limitu
- posloupnost vybraná $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = a_{k_1}, a_{k_2}, \dots$

  k_n … libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel

  – má stejnou limitu jako původní posloupnost (existuje-li), využití při důkazu neexistence limity

Ⓥ Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Ⓥ Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Ⓥ Posloupnost (a_n) je konvergentní $\Leftrightarrow$ pro ni platí Bolzano-Cauchy. podm.

Ⓥ Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Potom

- $\lim |a_n| = |a|$
- $\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b$ } má-li pravá strana smysl
- $\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ } má-li pravá strana smysl
- $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ — " — a je-li $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$ je-li $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a \in \mathbb{R}$ a $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

DŮKAZ PRO $a \in \mathbb{R}$

$(\forall \varepsilon_A > 0)(\exists n_A \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_A): |a_n - a| < \varepsilon_A$

$(\forall \varepsilon_B > 0)(\exists n_B \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_B): |b_n - b| < \varepsilon_B$

Předpokládám, že (a_n) je konvergentní, tedy omezená, tj. $|a_n| < K \ \forall n$. ($K \in \mathbb{R}$)

Zvolím libovolně $\varepsilon > 0$, dále zvolím $\varepsilon_A = \frac{\varepsilon}{2|b|}$, $\varepsilon_B = \frac{\varepsilon}{2K}$

a $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0, n \in \mathbb{N}): |a_n b_n - ab| =$$
$$= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| <$$
$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$$

Ⓥ Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

+ důkaz sporem (předpokládáme 2 různé limity $A < B$, zvolíme např. $\varepsilon = \frac{1}{3}|B-A|$, použijeme definici limity)