2.3 Čebyševova metoda

Uvažujme Richardsonovu metodu s proměnným parametrem danou iteračním předpisem

$$u_{i+1} = u_i + \omega_i \left(b - Au_i\right).$$

Pro chybu pak dostaneme

$$e_{i+1} = \left(I - \omega_i A\right) e_i = \left(I - \omega_i A\right) \cdots \left(I - \omega_0 A\right) e_0 = P_{i+1}(A)\, e_0,$$

kde $P_{i+1}(\lambda)$ je iterační polynom. Obdobně jako v důkazu Věty (2.1) dokážeme, že

$$\left\|e_{i+1}\right\|_m \le \max_k \left|P_{i+1}(\lambda_k)\right| \cdot \left\|e_0\right\|_m \tag{5}$$

$(m = 0, 1, 2)$. Pro získámí efektivní metody potřebujeme najít polynom P_{i+1} tak, že $P_{i+1}(0) = 1$ a hodnoty $P_{i+1}(\lambda_k)$ budou v absolutní hodnotě malé. Pokud P_{i+1} je takový polynom, potom ω_i jsou převrácené hodnoty kořenů tohoto polynomu.

Předpokládejme, že známe odhad $\sigma(A) \subset \langle \lambda_d, \lambda_h \rangle$. Jako polynom P_{i+1} můžeme zvolit normovaný Čebyševův polynom P_{i+1}^C, pro který bude platit

$$\max_{\lambda \in \langle \lambda_d, \lambda_h \rangle} \left|P_{i+1}^C(\lambda)\right| = \min_{P_{i+1}} \max_{\lambda \in \langle \lambda_d, \lambda_h \rangle} \left|P_{i+1}(\lambda)\right|,$$

na pravé straně nerovnosti je minimum vedeno přes všechny polynomy stupně $i+1$ normované podmínkou $P_{i+1}(0) = 1$.

2.3.1 Čebyševův polynom

- Čebyševův polynom na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$:

$$\widetilde{\chi}_n(x) = \cos\left(n \cdot \arccos x\right) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right].$$

  Zřejmě $\left|\widetilde{\chi}_n(x)\right| \le 1$. Kořeny $\widetilde{\chi}_n$ jsou dány rovností $n \cdot \arccos \tilde{x}_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ pro $k = 1, \ldots, n$. Tedy

$$\tilde{x}_k = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{n}\right).$$

- Čebyševův polynom na intervalu $\langle \lambda_d, \lambda_h \rangle$:

$$\chi_n(\lambda) = \widetilde{\chi}_n\left(\frac{\lambda_h + \lambda_d - 2\lambda}{\lambda_d - \lambda_h}\right) = \cos\left(n \cdot \arccos \frac{\lambda_h + \lambda_d - 2\lambda}{\lambda_d - \lambda_h}\right).$$

  Zřejmě $\chi_n(0) = \widetilde{\chi}_n(x_0)$, kde $x_0 = \frac{\lambda_h + \lambda_d}{\lambda_d - \lambda_h} = \frac{c+1}{c-1} \ge 1$, $c = \frac{\lambda_h}{\lambda_d}$ je odhadem čísla podmíněnosti. Kořeny získáme lineární transformací, tedy

$$\tilde{x}_k = \frac{\lambda_h + \lambda_d - 2x_k}{\lambda_d - \lambda_h}, \quad x_k = \frac{\lambda_h + \lambda_d}{2} - \frac{\lambda_d - \lambda_h}{2}\tilde{x}_k,$$

  kde $\tilde{x}_k$ je kořen polynomu $\widetilde{\chi}_n(x)$.

- Normovaný polynom $\bar{\chi}_n$ splňující $\bar{\chi}_n(0) = 1$:

$$\bar{\chi}_n(\lambda) = \frac{\chi_n(\lambda)}{\chi_n(0)}$$

  pro $\kappa \ne 1$.

2.3.2 Odhad chyby

Podobně jako v případě Richardsonovy metody hledáme horní odhad pro $\left|\bar{\chi}_n(\lambda)\right|$,

$$\left|\bar{\chi}_n(\lambda)\right| = \frac{\left|\chi_n(\lambda)\right|}{\left|\chi_n(0)\right|}.$$

Pro čitatel zřejmě platí $\left|\chi_n(\lambda)\right| \le 1$, pro jmenovatel platí

$$\begin{aligned}
\chi_n(0) = \widetilde{\chi}_n(x_0) &\ge \frac{1}{2}\left(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{c-1} + \sqrt{\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2 - 1}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{c + 1 + 2\sqrt{c}}{\kappa - 1}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{c}+1\right)^2}{\sqrt{c}^2 - 1}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)^n,
\end{aligned}$$

proto $\chi_n(0)$ je definováno a nenulové pro $\kappa \ne 1$. Dostáváme tedy odhad

$$\left|\bar{\chi}_n(\lambda)\right| \le 2\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}\right)^n. \tag{6}$$

Nebudeme se zabývat podrobnostmi implementace metody, viz [Axelsson 1994, Templates]. Poznamenejme jen, že

- odhad (6) ukazuje možné významné zrychlení oproti Richardsonově metodě, pro níž jsme odvodili odhad

$$\left|P_i^R(\lambda)\right| \le \left(\frac{c-1}{c+1}\right)^i,$$

- odhad (6) využijeme dále i pro odhad konvergence metody sdružených gradientů,

$$\left\|u_i - u^\star\right\|_A \le 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1}\right)^i \cdot \left\|u_0 - u^\star\right\|_A.$$

2.4 Metoda největšího spádu

Iterační předpis metody největšího spádu má opět tvar Richardsonovy metody s proměnným parametrem,

$$u_{i+1} = u_i + \omega_i r_i.$$

Koeficient ω_i však nyní určíme tak, aby energetická norma chyby $e_{i+1} = e_{i+1}(\omega) = u_{i+1} - u^* = u_i + \omega_i r_i - u^*$ byla minimální, minimalizujeme tedy normu $\|e_{i+1}\|_A$, respektive její druhou mocninu:

$$\begin{aligned}
\varphi(\omega) &= \|e_{i+1}\|_A^2 = \|u_{i+1} - u^*\|_A^2 = \|u_i + \omega r_i - u^*\|_A^2 = \|e_i + \omega r_i\|_A^2 \\
&= (e_i + \omega r_i, e_i + \omega r_i)_A = (Ae_i + A\omega r_i, e_i + \omega r_i) = \\
&= (Ae_i, e_i) + 2 \cdot (Ae_i, \omega r_i) + (A\omega r_i, \omega r_i) = \\
&= (Ae_i, e_i) + 2\omega \cdot (Ae_i, r_i) + \omega^2 \cdot (Ar_i, r_i)
\end{aligned}$$

Pokud koeficient ω_i minimalizuje $\varphi(\omega)$, platí

$$\varphi'(\omega_i) = 2 \cdot (Ae_i, r_i) + 2\omega_i \cdot (Ar_i, r_i) = 0.$$

S využitím $Ae_i = A \cdot (u_i - u^*) = Au_i - b = -r_i$ dostaneme

$$\omega_i = -\frac{(Ae_i, r_i)}{(Ar_i, r_i)} = \frac{(r_i, r_i)}{(Ar_i, r_i)}.$$

Poznámka 2.2. Koeficient ω_i lze získat také minimalizací tzv. energetického funkcionálu $\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (b, u)$, [Vondrák, Pospíšil 2011].

$$\begin{aligned}
\|u - u^*\|_A^2 &= (A(u - u^*), u - u^*) = \\
&= (Au, u) - (Au^*, u) - (Au, u^*) + (Au^*, u^*) = \\
&= \underbrace{(Au, u) - 2(b, u)}_{2 \cdot \mathcal{J}(u)} + \underbrace{(Au^*, u^*)}_{\text{konstanta}}
\end{aligned}$$

△

Poznámka 2.3. Využíváme ekvivalenci mezi řešením soustavy a minimalizací funkcionálu. Řešení soustavy lineárních rovnic $Au = b$, kde A je SPD, je ekvivalentní s řešením úlohy

$$u = \operatorname{argmin} \|u - u^*\|_A = \operatorname{argmin} \mathcal{J}(u).$$

△

Algoritmus 2 (Metoda největšího spádu se dvěma násobeními maticí A v iteraci)

$u_0 \longleftarrow$
`for` $i = 0, 1, \ldots$
  $r_i = b - A \cdot u_i$
  $\omega_i = \frac{(r_i, r_i)}{(Ar_i, r_i)}$
  $u_{i+1} = u_i + \omega_i \cdot r_i$
`end`

Algoritmus 3 (Metoda největšího spádu, jedno násobení maticí A díky rekurentnímu vztahu pro reziduum)

$u_0 \longleftarrow$
$r_0 = b - A \cdot u_0$
`for` $i = 0, 1, \ldots$
  $v_i = A \cdot r_i$
  $\omega_i = \frac{(r_i, r_i)}{(v_i, r_i)}$
  $u_{i+1} = u_i + \omega_i \cdot r_i$
  $r_{i+1} = r_i - \omega_i \cdot v_i$
`end`

Věta 2.2. (Konvergence metody největšího spádu) Pro chybu

$$e_{i+1} = u_{i+1} - u^\star = u_i + \omega_i r_i - u^\star$$

iterace metody největšího spádu platí

$$\|e_{i+1}\|_A = \|u_i + \omega_i r_i - u^\star\|_A \le \|u_i + \omega_{opt} r_i - u^\star\|_A \le q \|e_i\|_A,$$

kde

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}, \; q = \max_k |1 - \omega_{opt}\lambda_k| = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \; \kappa = \operatorname{cond}(A).$$

Důkaz. Využíváme optimalitu iterace metody největšího spádu v A-normě a srovnání s Richardsonovou metodou pro ω_{opt}, viz (3), (4) a Věta 2.1. □