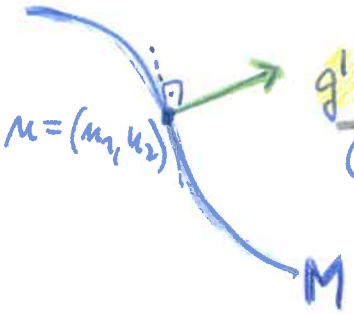
# 2. SMÍŠENÉ (VARIAČNÍ) FORMULACE

**Příklad 1.** Buď $J:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $J\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: g(x,y)=0\}$, $g\in C^1$, $g'\neq \underset{(0,0)}{0}$ na $M$.

Hledejme $u\in\mathbb{R}^2\cap M$ tak, aby $\boxed{J(u)=\min_{v\in M} J(v)}$.

**Pozorování.**

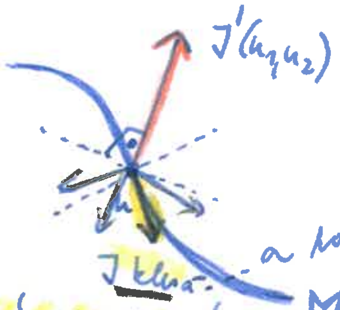
Je-li $u=(u_1,u_2)\in M$ hledaným vázaným extrémem, je




$g'(u_1,u_2)$ „kolmý na $M$" !
($M$ ... vrstevnice $g$)

a navíc $J'(u_1,u_2)=0$ nebo $J'(u_1,u_2)$ je „kolmý na $M$" !

„Dk." sporem




a to je spor s tím, že $J(u)=\min_{v\in M} J(v)$

Odtud plyne nutná podmínka:

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}: \quad J'(u_1,u_2)+\lambda\, g'(u_1,u_2)=0 \ (=(0,0))$$

$$\Downarrow$$

$\exists\lambda\in\mathbb{R}$:
- $(u_1,u_2)$ je stacionárním bodem $J_\lambda(x,y):=J(x,y)+\lambda g(x,y)$,
- $(u_1,u_2)\in M$.

Buď např.

$$\boxed{\begin{aligned} J(x,y) &:= (x-3)^2-(y+2)^2 \\ M &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{y}_{=\,g(x,y)}=0\} \end{aligned}}$$

Hledáme tedy $u=(u_1,u_2)\in M$ a $\lambda\in\mathbb{R}$ takové, aby $u$ byl stacionárním bodem funkce

$$\boxed{J_\lambda(x,y) := (x-3)^2-(y+2)^2+\lambda\cdot y}$$

Odtud plyne, že $\forall v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2 =: V$ : $\langle J_\lambda'(u), v\rangle = 0$, tj.:

$$2(u_1-3)v_1 - 2(u_2+2)v_2 + \lambda v_2 = 0, \text{ a proto}$$

$$\underbrace{2u_1v_1 - 2u_2v_2}_{=:\,a(u,v)} + \underbrace{\lambda v_2}_{=:\,b(v,\lambda)} = \underbrace{6v_1 + 4v_2}_{=:\,F(v)}$$

Navíc $u=(u_1,u_2)\in M$, a proto $\underbrace{q\cdot u_2}_{=\,b(u,q)} = 0$ pro $\forall q\in\mathbb{R} =: \Pi$

Shrnutí:

(*) Hledáme $(u,\lambda)\in V\times\Pi$ tak, aby

- $\forall v\in V$: $\quad a(u,v)+b(v,\lambda) = F(v)$,
- $\forall q\in\Pi$: $\quad b(u,q) = 0$

($V, \Pi$ ... Hilbertovy prostory, $a: V\times V\to\mathbb{R}$, $b: V\times\Pi\to\mathbb{R}$, $F: V\to\mathbb{R}$)

... smíšená (variační) formulace

... smíšená úloha

V našem případě: $\lambda = 4$, $u = (u_1, u_2) = (3,0) \in M$,
$J_4(x,y) = (x-3)^2 - y^2 - 4$.

$u = (3,0)$ je
- jediným stacionárním bodem funkce $J_4$,
- sedlovým bodem funkce $J_4$.

$$\boxed{J(3,0) = \min_{(x,y)\in M} J(x,y)}.$$

**Příklad 2.** Stokesův problém:

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta \vec{u} + \operatorname{grad} p = \vec{f} & \text{v } \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{v } \Omega, \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{na } \partial\Omega \end{cases}}$$

$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ... rychlost proudění ($n = 3$)
$p$ ... tlak

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u_i + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i & \text{v } \Omega \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 & \text{v } \Omega, \\ u_i = 0 & \text{na } \partial\Omega \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \end{cases}}$$

($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí,
$\vec{f} = (f_1, \dots, f_n) \in [L^2(\Omega)]^n$)

Přejděme ke slabé formulaci: (Standardní případ pomocí Greenovy věty)

$\left(\forall \vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in [H_0^1(\Omega)]^n =: V\right) \left(\forall i \in \{1, \dots, n\}\right)$:

$$\int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i \, dx - \int_\Omega p \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega f_i v_i \, dx$$

Sečtením těchto $n$ rovnic dostaneme:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i \, dx}_{=: a(\vec{u}, \vec{v})} \underbrace{- \int_\Omega p \cdot \operatorname{div} \vec{v} \, dx}_{=: b(\vec{v}, p)} = \underbrace{\int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx}_{=: F(\vec{v})}$$

Navíc:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \rightsquigarrow \left(\forall q \in \Pi := \left\{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q \, dx = 0\right\}\right):$$

$$\underbrace{-\int_\Omega q \cdot \operatorname{div} \vec{u}}_{= b(\vec{u}, q)} = 0$$

Shrnutí:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Hledáme } (\vec{u}, p) \in V \times \Pi \text{ tak, aby} \\ \bullet\ \forall \vec{v} \in V: \quad a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) = F(\vec{v}), \\ \bullet\ \forall q \in \Pi: \quad b(\vec{u}, q) = 0. \end{array}}$$

## Pozorování!

Buď $(u,p) \in V \times \Pi$ řešením smíšené úlohy (*) (viz strana 2) a buď navíc:

$a$ … bilineární, spojitá, eliptická, symetrická,

$b$ … bilineární, spojitá,

$F \in V^*$.

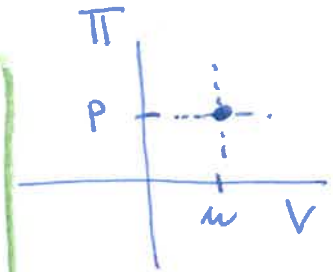
Pak pro Lagrangeovu funkci

$$\boxed{L(v,q) := \frac{1}{2} a(v,v) - F(v) + b(v,q)}$$

platí

$$\boxed{L(u,q) \overset{a)}{\le} L(u,p) \overset{b)}{\le} L(v,p)}$$

$\forall q \in \Pi$ $\qquad$ $\forall v \in V$




**Důkaz** a) $\forall q \in \Pi$:

$$L(u,q) = \frac{1}{2} a(u,u) - F(u) + b(u,q)$$

$$b(u,q) = 0 = b(u,p)$$

viz druhá rovnice v (*)

$$L(u,p) = \frac{1}{2} a(u,u) - F(u) + b(u,p)$$

$$\Downarrow$$

$$L(u,q) = L(u,p)$$

cbd a)

b)



$$\boxed{\forall v \in V: \quad L(u,p) \le L(v,p)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall v \in V: \quad \frac{1}{2} a(u,u) - F(u) + b(u,p) \le \underbrace{\frac{1}{2} a(v,v) - F(v) + b(v,p)}_{=: \tilde{J}(v)}$$

$$\Updownarrow$$

$$u \in V \ \dots \quad \tilde{J}(u) = \min_{v \in V} \tilde{J}(v)$$

$$\Updownarrow$$

viz větu na straně 3 kapitoly 1. Variační rovnice

$$\forall v \in V: \quad \langle \tilde{J}'(u), v \rangle = 0$$

$$\langle \tilde{J}'(u), v \rangle = a(u,v) - F(v) + b(v,p)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall v \in V: \quad a(u,v) + b(v,p) = F(v),}$$

a to je první rovnice v $(*)$

Cbd (b)

Cbd.

**Poznámka.** Na základě tohoto pozorování mluvíme o sedlobodových úlohách.

**Věta.**

- $V, \Pi$ ... <u>Hilbertovy prostory</u>
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$
  $b : V \times \Pi \to \mathbb{R}$ ... <u>bilineární formy</u>
- $a, b$ ... <u>spojité</u>, tzn. $(\exists k>0)(\forall u, v \in V) : |a(u,v)| \leq k \cdot \|u\| \cdot \|v\|$
  $(\exists k>0)(\forall u \in V)(\forall p \in \Pi) : |b(u,p)| \leq k \cdot \|u\| \cdot \|p\|$
- $a$ ... <u>Z-eliptická</u>, tzn. $(\exists \alpha>0)(\forall u \in Z) : \alpha \cdot \|u\|^2 \leq a(u,u)$,
  kde $Z = \{ v \in V : b(v,q) = 0$ pro každé $q \in \Pi \}$
- $b$ ... splňuje <u>inf-sup</u> (BB) <u>podmínku</u>, tzn.
  $$(\exists \beta>0)(\forall p \in \Pi) : \beta \cdot \|p\| \leq \sup_{\substack{w \in V \\ \neq 0}} \frac{b(w,p)}{\|w\|}$$
- <u>$F \in V^*$</u>

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists! (u,p) \in V \times \Pi : \\ \forall v \in V : \quad a(u,v) + b(v,p) = F(v) \\ \forall q \in \Pi : \quad\quad\quad\quad\quad b(u,q) = 0 \end{array}} \quad (*)$$

**Poznámka.**

- <u>inf-sup podmínka</u> $\rightsquigarrow$ <u>eliptičnost</u>

eliptičnost ... $\forall u : \alpha \|u\|^2 \leq a(u,u) \Rightarrow \forall u \neq 0 : \alpha \|u\| \leq \frac{a(u,u)}{\|u\|} \leq$
$$\leq \sup_{v \neq 0} \frac{a(v,u)}{\|v\|}$$

- $$\boxed{(BB) \Leftrightarrow \exists \beta > 0 : \inf_{\substack{p \in \Pi \\ \neq 0}} \sup_{\substack{w \in V \\ \neq 0}} \frac{b(w,p)}{\|p\| \cdot \|w\|}}$$

**Poznámka** k „nehomogenním" smíšeným formulacím

okrajová problém – existence $(u,p) \in V \times \Pi$:

$$(*) \qquad \boxed{\begin{aligned} \forall v \in V: \quad & a(u,v) + b(v,p) = F(v) \\ \forall q \in \Pi: \quad & b(u,q) = G(q) \end{aligned}} \qquad (G \in \Pi^*)$$

Pokud neexistuje $u_0 \in V$ takové, že $\forall q \in \Pi$: $b(u_0,q) = G(q)$, nemá problém $(*)$ řešení.

Buď $u_0 \in V$ libovolné takové, že $\forall q \in \Pi$: $b(u_0,q) = G(q)$.

Hledejme řešení $u$ k $(*)$ ve tvaru $u = u_1 + u_0$.

Pak

$$\boxed{\begin{aligned} & (u,p) \in V \times \Pi \\ & a(u,v) + b(v,p) = F(v) \\ & \qquad\qquad b(u,q) = G(q) \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} & (u_1,p) \in V \times \Pi \\ & a(u_1,v) + b(v,p) = F(v) - a(u_0,v) \\ & \qquad\qquad b(u_1,q) = 0 \end{aligned}}$$

... a to je problém $(*)$

**Důkaz věty.**

Zřejmě $u$ hledáme v $Z$;

$Z$ je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $V$,

a proto $Z$ je Hilbertův prostor.

Lax-Milgram $\Rightarrow$ $\boxed{(\exists!\, u \in Z)(\forall v \in Z): \; a(u,v) = F(v)}$

$(+)$

Zbývá najít $p \in \Pi$ takové, aby

$$\forall v \in V: \quad a(u,v) + b(v,p) = F(v),$$

tzn. aby

$$\boxed{\forall v \in V: \quad b(v,p) = \underbrace{F(v) - a(u,v)}_{=: \tilde{F}(v)}} \quad , \quad \tilde{F} \in V^*$$

pro $v \in Z$ to platí (viz (+)),

takže máme najít $p \in \Pi$ takové, aby

$$\boxed{\forall v \in Z^\perp: \quad b(v,p) = \tilde{F}(v)}$$

$(V = Z \oplus Z^\perp, \; Z^\perp = \{v \in V: (v,w) = 0 \text{ pro každé } w \in Z\})$

$Z^\perp$ ... uzavřený podprostor Hilbertova prostoru

$\Downarrow$

$Z^\perp$ je Hilbertův prostor

$(\tilde{F} \in (Z^\perp)^*)$

$$\boxed{\forall p \in \Pi: \quad v \longmapsto b(v,p) \in (Z^\perp)^*}$$

$\Downarrow$ RIESZ

$$\boxed{(\forall p \in \Pi)(\exists!\, Tp \in Z^\perp)(\forall v \in Z^\perp): \; b(v,p) = (Tp, v)}$$

Nyní zkoumejme vlastnosti zobrazení

$$\boxed{T: \Pi \to Z^\perp}$$

- **T je lineární**

(bilinearita $b$)

$$(\forall p_1,p_2\in\Pi)(\forall r\in Z^\perp):\ (T(p_1+p_2),r)=b(r,p_1+p_2)=b(r,p_1)+b(r,p_2)=$$
$$=(Tp_1,r)+(Tp_2,r)$$
$$\Downarrow$$
$$(\forall p_1,p_2\in\Pi)(\forall r\in Z^\perp):\ (T(p_1+p_2)-Tp_1-Tp_2\,,\,r)=0$$
$$\Downarrow \text{ volme } r=T(p_1+p_2)-Tp_1-Tp_2$$
$$T(p_1+p_2)-Tp_1-Tp_2=0$$

(podobně $(\forall p\in\Pi)(\forall\lambda\in\mathbb{R})$: $T(\lambda p)=\lambda T(p)$) cbd.

- **T je spojitý** (díky linearitě stačí ukázat omezenost)

(spojitost $b$)

$$\forall p\in\Pi:\quad \|Tp\|^2=(Tp,Tp)=b(Tp,p)\le k\cdot\|Tp\|\cdot\|p\|$$
$$\Downarrow$$
$$\|Tp\|\le k\|p\|$$
cbd.

- **T je prostý**

(bilinearita $b$)

$$p_1,p_2\in\Pi:\ Tp_1=Tp_2 \implies \forall r\in Z^\perp:\ \underset{b(r,p_1)}{(Tp_1,r)}=\underset{b(r,p_2)}{(Tp_2,r)} \implies$$

$$\implies \forall r\in Z^\perp:\ b(r,p_1-p_2)=0 \implies \sup_{\substack{r\in Z^\perp\\ \neq 0}}\frac{b(r,p_1-p_2)}{\|r\|}=0$$

(definice $Z$, $V=Z\oplus Z^\perp$; bilinearita $b$)

$$\beta\|p_1-p_2\|\le\sup_{\substack{r\in V\\ \neq 0}}\frac{b(r,p_1-p_2)}{\|r\|}$$

(inf-sup podmínka)

$$\Downarrow$$
$$p_1=p_2.$$
cbd.

- **$T(\Pi)$ je uzavřený podprostor $Z^\perp$**

... $T$ je lineární $\Rightarrow$ $T(\Pi)$ je podprostor

$$\left( \begin{aligned} Tp_1 + Tp_2 &= T(p_1+p_2) \in T(\Pi) \\ \lambda Tp &= T(\lambda p) \in T(\Pi) \end{aligned} \right)$$

... $T(\Pi)$ je uzavřený

Buď $(p_n) \subset \Pi$ taková posloupnost, že $Tp_n \to y$ v $Z^\perp$.

Chceme ukázat, že $y \in T(\Pi)$, tzn. že $\exists p \in \Pi : y = Tp$

$$0 \le \beta \|p_n - p_m\| \overset{\text{inf-sup}}{\le} \sup_{\substack{w \in Z^\perp \\ w \neq 0}} \frac{b(w, p_n - p_m)}{\|w\|} = \sup_{\substack{w \in Z^\perp \\ w \neq 0}} \frac{(T(p_n - p_m), w)}{\|w\|} \le \|Tp_n - Tp_m\|$$

$$\frac{(T(p_n - p_m), w)}{\|w\|} \overset{\text{CSB nerovnost}}{\le} \frac{\|Tp_n - Tp_m\| \cdot \|w\|}{\|w\|}$$

$(T(p_n))$ je konvergentní $\Rightarrow$ $(Tp_n)$ je cauchyovská $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(p_n)$ je cauchyovská (v $\Pi$ ... Hilbert. pr.) $\Rightarrow$ $\exists p \in \Pi : p_n \to p$ $\overset{T \text{ je spoj.}}{\Longrightarrow}$

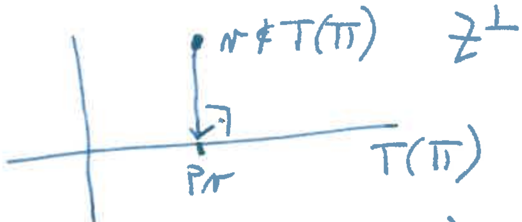
$\Rightarrow$ $\exists p \in \Pi : Tp_n \to Tp$ $\Rightarrow$ $\exists p \in \Pi : y = Tp$.

$Tp_n \xrightarrow{\text{předpoklad}} y$

Cbd.

- **$T$ je na, tzn. $T(\Pi) = Z^\perp$**

Sporem - buď $v \in Z^\perp \setminus T(\Pi)$




a buď $P : Z^\perp \to T(\Pi)$ ortogonální projekce (na uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $Z^\perp$).

Pak $\forall q \in \Pi$: $b(v - Pv, q) = (\underset{T(\Pi)}{Tq}, v - Pv) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\left. \begin{aligned} v - Pv &\in Z_0 \\ &\in Z^\perp \end{aligned} \right\} \Rightarrow v - Pv = 0 \Rightarrow v = Pv \in T(\Pi)$$

$\not\in T(\Pi)$, a to je spor.

cbd.

(viz str. 9)

... a finále :

$$\tilde{F} \in (Z^\perp)^* \overset{\text{RIESZ}}{\Longrightarrow} (\exists!\, w \in Z^\perp)(\forall v \in Z^\perp) : (w, v) = \tilde{F}(v)$$

$\Downarrow$ vlastnosti $T$ $(\exists!\, p \in \Pi : Tp = w)$

$$\boxed{(\exists!\, p \in \Pi)(\forall v \in Z^\perp) : \underbrace{(T(p), v)}_{=\, b(v,p)} = \tilde{F}(v)}$$

CBD.