1. VARIAČNÍ ROVNICE

Příklad 1. Buď $J(x,y) := (x-3)^2 + (y+2)^2$.

Hledejme $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 =: V$ tak, aby $\boxed{J(u) = \min_{v \in \mathbb{R}^2} J(v).}$

Nutná podmínka:

$$\forall \underset{(v_1,v_2)}{\underset{\|}{v}} \in \mathbb{R}^2 : \quad \langle J'(u), v \rangle = J'(u) \cdot v = 0,$$

skalární součin

tzn. $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 = V$

$$2(u_1-3)v_1 + 2(u_2+2)v_2 = 0, \text{ po úpravě}$$

$$\underbrace{u_1 v_1 + u_2 v_2}_{=: a(u,v)} = \underbrace{3v_1 - 2v_2}_{=: F(v)}$$

Variační rovnice:

> Hledáme $u \in V$ takové, aby
>
> $\forall v \in V : \quad a(u,v) = F(v)$

(V... Hilbertův prostor, $a : V \times V \to \mathbb{R}$, $F : V \to \mathbb{R}$)

Příklad 2. Hledejme $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 =: V$ takové, aby

$$\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad \underbrace{u_1 v_1 + u_2 v_1 + u_2 v_2}_{=: a(u,v)} = \underbrace{2v_1 + 3v_2}_{=: F(v)}$$

Příklad 3. $\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f & v\ \Omega, \\ u = 0 & na\ \partial\Omega. \end{cases}}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená oblast s lipsch. hranicí, $f \in L^2(\Omega)$.

Slabá formulace:

Hledáme $u \in V := H^1_0(\Omega)$ takové, aby

$$\forall v \in V : \quad \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx}_{=: a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v \, dx}_{=: F(v)}$$

Věta (RIESZ)

- V ... Hilbertův prostor
- $F \in V^*$

$$\Longrightarrow (\exists!\, u \in V)(\forall v \in V): (u,v) = F(v),$$

navíc

$$\|u\|_V = \|F\|_{V^*}$$

Př. 1 ... $a(u,v) = (u,v)$ ... skalární součin v $\mathbb{R}^2$

$F \in (\mathbb{R}^2)^*$

$\Downarrow$ RIESZ

$\exists!\, u = (u_1, u_2) \ldots \qquad (u = (3,-2))$

Věta (LAX-MILGRAM)

- V ... Hilbertův prost.
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$
  - bilineární
  - spojitá, tzn. $(\exists k > 0)(\forall u,v \in V): |a(u,v)| \le k\|u\|\cdot\|v\|$
  - eliptická, tzn. $(\exists c > 0)(\forall u \in V): a(u,u) \ge c\|u\|^2$
- $F \in V^*$

$$\Longrightarrow (\exists!\, u \in V)(\forall v \in V): a(u,v) = F(v),$$

navíc

$$\|u\|_V \le \frac{1}{c}\|F\|_{V^*}$$

Př. 2 ... $a(u,v) = u_1 v_1 + u_2 v_1 + u_2 v_2$

NENÍ SYMETRICKÁ

- bilineární
- spojitá: $|a(u,v)| \le |u_1||v_1| + |u_2||v_1| + |u_2||v_2| \le 3\|u\|\cdot\|v\|$,
- eliptická: $a(u,u) = u_1^2 + u_2 u_1 + u_2^2 \ge u_1^2 - \frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + u_2^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2$

$2|u_1 u_2| \le u_1^2 + u_2^2$

$F \in (\mathbb{R}^2)^*$

$\Downarrow$ LAX-MILGRAM

$\exists!\, u = (u_1, u_2) \ldots \qquad (u = (-1,3))$

Pozorování

Nechť jsou splněny předpoklady Lax-Milgramovy věty a nechť forma $a: V\times V \to \mathbb{R}$ je navíc symetrická (tzn. $\forall u,v\in V: a(u,v)=a(v,u)$).

Pak (viz definici skal. součinu) $a(\cdot,\cdot)$ je jedním ze skalárních součinů na V, a navíc

$$c\cdot\|u\|^2 \underset{\substack{\text{eliptičnost}\\ a}}{\leq} a(u,u) \underset{\substack{\text{spojitost}\\ a}}{\leq} k\cdot\|u\|\cdot\|u\| = k\cdot\|u\|^2,$$

jsou normy $|||u||| := \sqrt{a(u,u)}$ a $\|u\|$ na prostoru V ekvivalentní.

Odtud a z předpokladu, že $V=(V,\|\cdot\|)$ je Hilbertův pr. plyne, že prostor $(V,|||\cdot|||)$ je Hilbertův (a že F je spojitý lineární funkcionál i na $(V,|||\cdot|||)$).

Můžeme proto na úlohu $a(u,v)=F(v)$ aplikovat přímo Rieszovu větu.

Věta Jsou-li splněny předpoklady Lax-Milgramovy věty a bilineární forma a je navíc symetrická, platí ekvivalence

$$\boxed{\begin{array}{l} u\in V,\\ \forall v\in V: a(u,v)=F(v)\end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} u\in V,\\ J(u)=\min\limits_{v\in V} J(v),\\ \text{kde}\\ J(u):=\frac{1}{2}a(u,u)-F(u)\end{array}}$$

Varování! Není-li forma a symetrická, nesouhlasí řešení variační rovnice
$$\boxed{\begin{array}{l} u \in V \\ \forall v \in V:\ a(u,v) = F(v) \end{array}}$$
s minimem funkcionálu
$$\boxed{J(u) := \frac{1}{2} a(u,u) - F(u)}.$$

Vraťme se k **Př. 2**

Řešením příslušné variační rovnice je $u = (-1, 3)$,

zatímco funkcionál
$$J(u) := \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2 u_1 + u_2^2\right) - 2u_1 - 3u_2$$
má minimum v bodě $u = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Př. 3 Forma $\boxed{a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx}$

je na prostoru $V = H_0^1(\Omega)$ s normou $\|u\| := \sqrt{\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx}$

... bilineární,

... spojitá: $\left|\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx\right| \leq \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx} \leq \|u\| \cdot \|v\|$,

Hölderova nerovnost

... eliptická: $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq c \|u\|^2$

Friedrichsova nerovnost

... symetrická.

Funkcionál $\boxed{F(v) := \int_\Omega f v \, dx} \in V^*$, protože

je na V

... lineární,

... omezený: $\left|\int_\Omega f v \, dx\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_2 \cdot \|v\|$

Hölderova nerovnost v Schwarzova nerovnost

Proto

$u \in V$ je takové, že $\boxed{\forall v \in V: \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx}$

$$\Updownarrow$$

$u \in V$ je takové, že $\boxed{J(u) = \min_{v \in V} J(v)}$

kde $J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega f v \, dx$.

(A navíc, takové $u \in V$ existuje právě jedno)