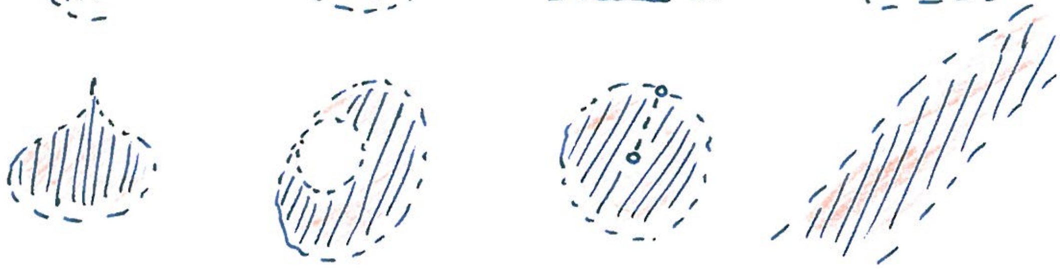
SOBOLEVOVY PROSTORY NA HRANICI

Opakování

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí

ANO:

NE:



$$\boxed{H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} = \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H^1}}}$$

... Hilbertův prostor

$i \in \{1, \dots, N\}$ ... derivace ve smyslu distribucí

$$\boxed{\|u\|_{H^1} := \sqrt{\int_\Omega u^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}}$$

... dána skal. součinem

$$\boxed{(u, v) = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \nabla v}$$

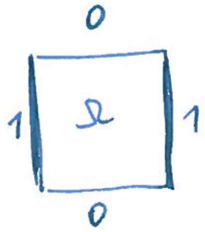
Věta (o stopách)

$\exists!\, T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ takové, že

- T je lineární,
- T je spojitý,
- $\forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \; Tu = u|_{\partial\Omega}$.

$$\boxed{H^1_0(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : Tu = 0 \} = \overline{C_0^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H^1}}}$$

Tvrzení. $\boxed{T(H^1(\Omega)) \subsetneq L^2(\partial\Omega)}$

např. $\varphi =$  $\in \underline{L^2(\partial\Omega) \setminus T(H^1(\Omega))}$

Definice. $\boxed{H^{1/2}(\partial\Omega) := T(H^1(\Omega)) = \{\varphi \in L^2(\partial\Omega) : (\exists v \in H^1(\Omega) : Tv = \varphi)\}}$

Zřejmě $\varphi_1, \varphi_2 \in H^{1/2}(\partial\Omega) \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$\alpha \in \mathbb{R},\ \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega) \Rightarrow \alpha \cdot \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$$\Downarrow$$

$H^{1/2}(\partial\Omega)$ je vektorový podprostor $L^2(\partial\Omega)$

Definice. $\|\cdot\| : H^{1/2}(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\|\varphi\| := \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ Tv = \varphi}} \|v\|_{H^1}}$$

Pozorování.

Zřejmě $\left.\begin{array}{l} v_1, v_2 \in H^1(\Omega) \\ Tv_1 = Tv_2 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1 - v_2 \in H^1_0(\Omega)$

Tvrzení. $\forall \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega) : \|\varphi\| = \|v_\varphi\|_{H^1}$,

kde $v_\varphi \in H^1(\Omega)$ je slabým řešením okrajové úlohy

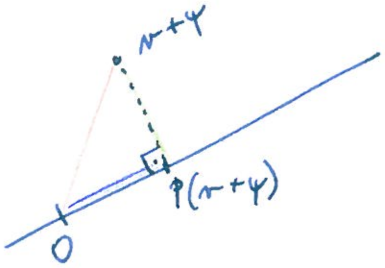
$$(*)\ \begin{cases} -\Delta v_\varphi + v_\varphi = 0 & \text{v } \Omega, \\ v_\varphi = \varphi & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dk. Buď $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ a $v \in H^1(\Omega)$ takové, že $Tv = \varphi$.
Už víme (viz pozorování na str. 2), že

$$\|\varphi\| = \inf_{Tw=\varphi} \|w\|_{H^1} = \inf_{\psi \in H^1_0(\Omega)} \|v+\psi\|_{H^1}$$

Uvažujme ortogonální projekci $\boxed{P : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1_0(\Omega)}$

uzavřený podprostor Hilbertova prostoru $H^1(\Omega)$



Pro každé $\psi \in H^1_0(\Omega)$ platí:

$$\|v+\psi\|^2_{H^1} = \|\underbrace{v+\psi-P(v+\psi)}_{=\, v+\psi-Pv-\underbrace{P\psi}_{=\psi}}\|^2_{H^1} + \|P(v+\psi)\|^2_{H^1},$$

$$= v - Pv$$

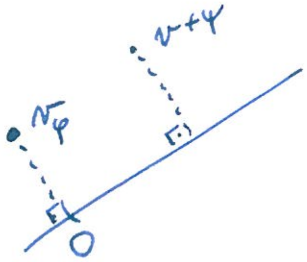
... nezávisí na ψ

a proto

$$\boxed{\|\varphi\| = \inf_{\psi \in H^1_0(\Omega)} \|v+\psi\|_{H^1} = \|v_\varphi\|_{H^1}},$$

kde $v_\varphi = v+\psi$ je takové, že
$Pv_\varphi = P(v+\psi) = 0$.

Tzn., že $\forall z \in H^1_0(\Omega)$: $(v_\varphi - \underbrace{Pv_\varphi}_{=0}, z) = (v_\varphi, z) = 0$,



navíc $Tv_\varphi = T(v+\psi) = Tv + T\psi = \varphi + 0 = \varphi$.

Tzn., že v_φ je slabým řešením úlohy

$$-\Delta v_\varphi + v_\varphi = 0 \quad \text{v } \Omega$$
$$v_\varphi = \varphi \quad \text{na } \partial\Omega,$$

Cbd.

Tvrzení

$$\boxed{\|\varphi\| = \inf_{Tv=\varphi} \|v\|_{H^1} = \|v_\varphi\|_{H^1} \text{ je norma na } H^{1/2}(\partial\Omega).}$$

Dk. a) $\|\varphi\| \geq 0$ … zřejmé

$$\varphi = 0 \xRightarrow{\text{jednoznačná řešitelnost Dirichletovy úlohy } (*)} v_\varphi = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = \|v_\varphi\|_{H^1} = 0$$

$$\underbrace{\|\varphi\|}_{=\inf_{Tv=\varphi}\|v\|_{H^1}} = 0 \Rightarrow \exists (v_n) \subset H^1(\Omega) : \left.\begin{array}{l} \|v_n\| \to 0 \\ Tv_n = \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow v_n \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{Tv_n}_{=\varphi} \to T0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = 0$$

b) $\lambda = 0 \Rightarrow \|\lambda\varphi\| = |\lambda| \cdot \|\varphi\|$ … zřejmé

$$\|\lambda\varphi\| = \|0\| = 0, \qquad |\lambda|\cdot\|\varphi\| = 0$$

$\lambda \neq 0$

$$\|\lambda\varphi\| = \inf_{Tv=\lambda\varphi} \|v\|_{H^1} = \inf_{T(\frac{1}{\lambda}v)=\varphi} \|v\|_{H^1} = \inf_{T(\underbrace{\frac{1}{\lambda}v}_{=w})=\varphi} |\lambda| \cdot \left\|\frac{1}{\lambda}v\right\|_{H^1} =$$

$$= |\lambda| \cdot \underbrace{\inf_{Tw=\varphi} \|w\|_{H^1}}_{=\|\varphi\|} = |\lambda| \cdot \|\varphi\|$$

c)

$$\|\varphi_1 + \varphi_2\| = \|v_{\varphi_1+\varphi_2}\|_{H^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{úloha } (*) \\ \text{je lineární}}}{=} \|v_{\varphi_1} + v_{\varphi_2}\|_{H^1} \leq \|v_{\varphi_1}\|_{H^1} + \|v_{\varphi_2}\|_{H^2} = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|.$$

Cbd.

Věta $\boxed{(H^{1/2}(\partial\Omega), \|\cdot\|) \text{ je úplný}}$

Dk. $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ (tj. (φ_n) je cauchyovská v $H^{1/2}(\partial\Omega)$)

$$\|v_{\varphi_n - \varphi_m}\|_{H^1} = \| v_{\varphi_n} - v_{\varphi_m}\|_{H^1}$$

$$\Downarrow$$

(v_{φ_n}) je cauchyovská v úplném prostoru $H^1(\Omega)$

$$\Downarrow$$

$\exists v \in H^1(\Omega) : v_{\varphi_n} \to v$

Označím $\varphi = Tv \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

Pak $\forall z \in H^1_0(\Omega) : (v_{\varphi_n}, z) = 0 \implies v_\varphi = v$,

$$\downarrow$$

$$(v, z)$$

a proto

$\|\varphi_n - \varphi\| = \|v_{\varphi_n} - v_\varphi\|_{H^1} = \|v_{\varphi_n} - v\|_{H^1} \to 0 \implies \varphi_n \to \varphi$ v $H^{1/2}(\partial\Omega)$

cbd.

Věta. $\forall \varphi \in L^2(\partial\Omega)$:

$$\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega) \iff \int_{\partial\Omega}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{\|x-y\|^N}\, ds_x\right) ds_y < \infty$$

Navíc:

$$\boxed{|||\varphi||| := \sqrt{\int_{\partial\Omega}\varphi^2\, ds + \int_{\partial\Omega}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{\|x-y\|^N}\, ds_x\right) ds_y}} \text{ je}$$

na $H^{1/2}(\partial\Omega)$ normou ekvivalentní s $\|\cdot\|$.

Př. Uvažujme $\varphi = {}_1\boxed{\Omega}_1$ (s hodnotami 0 nahoře a dole) $\in L^2(\partial\Omega)$, $\Omega = (0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

Pak $\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{\|x-y\|^2}\, ds_x\right) ds_y \geq \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{1}{\|(x,0)-(0,y)\|^2}\, dx\right) dy = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\right) dy = \infty$

$\Rightarrow \varphi \notin H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Díky operátoru stopy $T: H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ můžeme mluvit o „hodnotách" funkcí z $H^1(\Omega)$ na hranici $\partial\Omega$.

Pokusíme se dát smysl i „derivaci podle vnější normály" v bodech hranice $\partial\Omega$ pro (NĚKTERÉ!) funkce z $H^1(\Omega)$.

Motivace. Buď u klasickým řešením úlohy

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega, \qquad u = g \text{ na } \partial\Omega;$$

a buď $v \in H^1(\Omega)$. Pak

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$\| \text{ Green}$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} Tv \, ds = \int_\Omega f v \, dx, \quad \text{a proto}$$

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \underbrace{Tv}_{\in H^{1/2}(\partial\Omega)} ds = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f v \, dx}$$

... pravá strana má smysl pro $u, v \in H^1(\Omega)$

Budeme chtít definovat $\frac{\partial u}{\partial n}$ jako funkcionál, který funkci $v \, (= Tv) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ přiřadí číslo $\left(= \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx\right)$.

Věta. Existuje spojité lineární zobrazení

$$E : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$$

takové, že $T(Eu) = u$ pro každé $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

Důkaz – a příklad výše uvedeného zobrazení:

~~[illegible]~~ Definujme Eu jako slabé řešení okrajové úlohy

$$-\Delta Eu = 0 \text{ v } \Omega, \qquad Eu = u \text{ na } \partial\Omega.$$

(Eu ... tzv. harmonické rozšíření u).

Pak E je zřejmě lineární a $\forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$: $T(Eu) = u$.

Zbývá ověřit spojitost, tzn. omezenost:

$\|Eu\|_{H^1} \le c\|u_0\|_{H^1}$, kde $u_0 \in H^1(\Omega)$ je jakákoliv funkce, pro niž $Tu_0 = u$

věta o existenci slabého řešení Dirichletovy úlohy (Lax-Milgram)

Odtud plyne:

$$\|Eu\|_{H^1} \le c\cdot \inf_{Tv=u} \|v\|_{H^1} = c\cdot \|u\|_{H^{1/2}}$$

(jinak:

$$\|Eu\|_{H^1} \le c\cdot \|v_u\|_{H^1} = c\|u\|_{H^{1/2}}\text{)}$$

cbd.

Uvažujme nyní (pro $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$) Dirichletovu úlohu:

$$-\Delta u = f \text{ v } \Omega,$$
$$u = g \text{ na } \partial\Omega.$$

Už víme:

$$\exists!\, u \in H^1(\Omega): \quad Tu = g,$$
$$\forall v \in H^1_0(\Omega): \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

Navíc:

$$\|u\|_{H^1} \le c\left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{1/2}}\right)$$

Definujme

$$\boxed{\begin{aligned} &l : H^{1/2}(\partial\Omega) \to \mathbb{R} \\ &l(w) := \int_\Omega \nabla u \nabla (Ew)\, dx - \int_\Omega f\cdot(Ew)\, dx \end{aligned}}$$

Pak l ... lineární,
... omezené:

$$|l(w)| \le \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2}\sqrt{\int_\Omega |\nabla Ew|^2} + \sqrt{\int_\Omega f^2}\sqrt{\int_\Omega (Ew)^2} \le \|u\|_{H^1}\cdot\|Ew\|_{H^1} + \|f\|_{L^2}\cdot\|Ew\|_{H^1} =$$

$$= \left(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{L^2}\right)\cdot \|Ew\|_{H^1} \le c\left(\|u\|_{H^1} + \|f\|_{L^2}\right)\cdot\|w\|_{H^{1/2}}$$

$$\boxed{l \overset{\text{ozn.}}{=} \frac{\partial u}{\partial n} \in \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^* =: H^{-1/2}(\partial\Omega)}$$

Pozorování. Všimněme si, že definice $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ nezávisí na konkrétní volbě rozšíření $\mathcal{E} : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$:

Dk.

$$l_1(w) := \int_\Omega \nabla u \, \nabla(\mathcal{E}_1 w) - \int_\Omega f(\mathcal{E}_1 w)$$

$$l_2(w) := \int_\Omega \nabla u \, \nabla(\mathcal{E}_2 w) - \int_\Omega f(\mathcal{E}_2 w)$$

$$v = \mathcal{E}_1 w - \mathcal{E}_2 w$$
$$Tv = T(\mathcal{E}_1 w) - T(\mathcal{E}_2 w) = w - w = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in H^1_0(\Omega),$$

a proto

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla(\underbrace{\mathcal{E}_1 w - \mathcal{E}_2 w}_{= v}) = \int_\Omega f(\underbrace{\mathcal{E}_1 w - \mathcal{E}_2 w}_{= v})$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \, \nabla(\mathcal{E}_1 w) - \int_\Omega f(\mathcal{E}_1 w)}_{= l_1(w)} = \underbrace{\int_\Omega \nabla u \, \nabla(\mathcal{E}_2 w) - \int_\Omega f(\mathcal{E}_2 w)}_{= l_2(w)}$$

cbd.

$$\boxed{H^{-1/2}(\partial\Omega) := \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*}$$

$f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$:

$$|\langle f,\varphi\rangle| \le c \cdot \|\varphi\|_{H^{1/2}}$$

inf $\rightsquigarrow$ $\|f\|_{H^{-1/2}}$

$$\boxed{\|f\|_{H^{-1/2}} := \sup_{\substack{\varphi\in H^{1/2}\\ \varphi\neq 0}} \frac{\langle f,\varphi\rangle}{\|\varphi\|_{H^{1/2}}}}$$

... chceme spočítat

$$\|f\|_{H^{-1/2}} = \sup_{\substack{v\in H^1\\ Tv\neq 0}} \frac{\langle f,Tv\rangle}{\|Tv\|_{H^{1/2}}} \ge \sup_{\substack{v\in H^1\\ v\neq 0}} \frac{\langle f,Tv\rangle}{\|v\|_{H^1}}$$

$$\|Tv\|_{H^{1/2}} = \inf_{Tw=Tv} \|w\|_{H^1} \le \|v\|_{H^1}$$

ukážeme, že platí rovnost

$$\frac{\langle f,\varphi\rangle}{\|\varphi\|_{H^{1/2}}} = \frac{\langle f,Tv_\varphi\rangle}{\|v_\varphi\|_{H^1}} \le \sup_{\substack{v\in H^1\\ v\neq 0}} \frac{\langle f,Tv\rangle}{\|v\|_{H^1}}$$

... nezávisí na φ,

$$-\Delta v_\varphi + v_\varphi = 0 \text{ v } \Omega, \quad v_\varphi = \varphi \text{ na } \partial\Omega.$$

proto

$$\|f\|_{H^{-1/2}} = \sup_{\varphi\neq 0} \frac{\langle f,\varphi\rangle}{\|\varphi\|_{H^{1/2}}} \le \sup_{v\neq 0} \frac{\langle f,Tv\rangle}{\|v\|_{H^1}}$$

Takže

$$\boxed{\|f\|_{H^{-1/2}} = \sup_{\substack{v\in H^1\\ v\neq 0}} \frac{\langle f,Tv\rangle}{\|v\|_{H^1}}}$$

Věta $$\boxed{\forall f \in H^{-1/2}(\partial\Omega) : \|f\|_{H^{-1/2}} = \sup_{v \neq 0} \frac{\langle f, Tv\rangle}{\|v\|_{H^1}} = \|v_f\|_{H^1},}$$

kde v_f je slabým řešením úlohy:

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta v_f + v_f = 0 & v\ \Omega, \\ \dfrac{\partial v_f}{\partial n} = f & na\ \partial\Omega, \end{cases}}$$

tzn. $v_f \in H^1(\Omega)$

$$\forall v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla v_f \nabla v \, dx + \int_\Omega v_f v \, dx = \langle f, Tv\rangle$$

Důkaz. $f = 0$ ... triviální. Buď $f \neq 0$

$$\forall v \in H^1, v \neq 0 : \int_\Omega \nabla v_f \nabla v + \int_\Omega v_f v = \underset{\|v_f\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}}{\underset{\wedge\!\!|}{(v_f, v)_{H^1}}} = \langle f, Tv\rangle, \text{ a proto}$$

$$\frac{\langle f, Tv\rangle}{\|v\|_{H^1}} \leq \|v_f\|_{H^1} \Longrightarrow \underbrace{\sup_{v \neq 0} \frac{\langle f, Tv\rangle}{\|v\|_{H^1}}}_{= \|f\|_{H^{-1/2}}} \leq \|v_f\|_{H^1}$$

Volme $v = v_f$. Pak

$$(v_f, v_f)_{H^1} = \|v_f\|^2_{H^1} = \langle f, Tv_f\rangle, \text{ a proto}$$

$$\|v_f\|_{H^1} = \frac{\langle f, Tv_f\rangle}{\|v_f\|_{H^1}} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{\langle f, Tv\rangle}{\|v\|_{H^1}} = \|f\|_{H^{-1/2}}$$

Cbd.

Poznámky

$u \in H^1(\Omega)$
$-\Delta u = f \in L^2(\Omega)$ ↳ rovnice ve smyslu distribucí

$\longrightarrow Tu \in H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow u$ řeší $\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = Tu \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

$$\boxed{\begin{gathered} H^1_\Delta(\Omega) := \{ u \in H^1(\Omega) : -\Delta u \in L^2(\Omega) \} \\ \|u\|_{H^1_\Delta} := \sqrt{\|u\|^2_{H^1} + \|\Delta u\|^2_{L^2}} = \sqrt{\int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\Delta u|^2} \end{gathered}}$$

- $\frac{\partial u}{\partial n} : H^1_\Delta(\Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ ... **lineární spojité** (Drábek, 1988, str. 618)

- $u \in H^2(\Omega) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega) \longrightarrow T\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$

$$\boxed{\begin{gathered} \forall u \in H^2(\Omega)\ \forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega): \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \right\rangle = \int_{\partial\Omega} \sum_i \left(T\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \cdot n_i \right) v \, ds_x \end{gathered}}$$

- $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \left(\varphi|_{\partial\Omega}, \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} \right)$ je zobrazení $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ na **hustý podprostor** $H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega) \right.$$

$$\left. \cong \quad v \longmapsto \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} v = \int_{\partial\Omega} \left(\sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \cdot n_i(x) \right) v(x) \, ds_x \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \right)$$

Věta $H^1_\Delta(\Omega)$ je úplný.

Dk. $\|u_n - u_m\|_{H^1_\Delta} = \sqrt{\|u_n - u_m\|^2_{H^1} + \|\Delta u_n - \Delta u_m\|^2_{L^2}} < \varepsilon$ ... (u_n) je cauchyovská v $H^1_\Delta(\Omega)$

$\Downarrow$

(u_n) je cauchyovská v úplném $H^1(\Omega)$

(Δu_n) — " — $L^2(\Omega)$

$\Downarrow$

$\exists u \in H^1(\Omega)$: $u_n \to u$ v $H^1(\Omega)$

$\exists f \in L^2(\partial\Omega)$: $\Delta u_n \to f$ v $L^2(\Omega)$

Zbývá dokázat, že $\Delta u = f$ ↳ ve smyslu distribucí

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\langle \Delta u_n, \varphi \rangle = -\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, dx$$

$$\| $$

$$(\Delta u_n, \varphi)_{L^2} = \int_\Omega \Delta u_n \varphi \, dx$$

$F(u) := \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi$

$F \in (H^1(\Omega))^*$

$$(f, \varphi)_{L^2} = \int_\Omega f \varphi \, dx = -\int \nabla u \nabla \varphi \, dx = \langle \Delta u, \varphi \rangle$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\Delta u = f}$$

Cbd.

„Gelfand Triple":

$$\boxed{H^{1/2}(\partial\Omega) \subsetneq L^2(\partial\Omega) \underset{\text{(Riesz)}}{\cong} (L^2(\partial\Omega))^* \subsetneq H^{-1/2}(\partial\Omega)}$$

hustě hustě

$u \in H^1(\Omega)$
$-\Delta u = f \in L^2(\Omega)$
$u = g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ $\longrightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$

Platí (Nečas, Corollary 6.19)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega) \iff g \in H^1(\partial\Omega)}$$

Věta (1. Greenova formule, McLean 118)

$\forall u, v \in H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx + \underbrace{\left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, Tv \right\rangle}_{= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} Tv\, ds, \text{ je-li } \frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)}$$

Důkaz. Buď $u \in H^1_\Delta(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ dáno.

Položme $v_0 := v - \mathcal{E}(Tv) \in H^1_0(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H^1}}$

$$Tv_0 = Tv - T(\mathcal{E}(Tv)) = Tv - Tv = 0$$

a vezmeme $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\overline{\Omega})$ tak, aby

$\varphi_n \to v_0$ v $H^1(\Omega)$.

Pak

$$\langle -\Delta u, \varphi_n \rangle = \langle \nabla u, \nabla \varphi_n \rangle$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\int_\Omega -\Delta u\, \varphi_n\, dx \qquad \int_\Omega \nabla u\, \nabla \varphi_n\, dx$$

$$\left| \int -\Delta u \cdot (\varphi_n - v_0) \right| \le \|\Delta u\|_{L^2} \cdot \|\varphi_n - v_0\|_{H^1} \to 0$$

$$\left| \int \nabla u\, \nabla(\varphi_n - v_0) \right| \le \|u\|_{H^1} \cdot \|\varphi_n - v_0\|_{H^1} \to 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\underline{\int_\Omega -\Delta u \cdot v_0\, dx} = \underline{\int_\Omega \nabla u\, \nabla v_0\, dx},$$

a proto

$$\underline{\int_\Omega \nabla u\, \nabla v\, dx} = \int_\Omega \nabla u\, \nabla (v_0 + \varepsilon(Tv))\, dx = \int_\Omega \nabla u\, \nabla v_0 + \int_\Omega \nabla u\, \nabla \varepsilon(Tv) =$$

$$= -\int_\Omega \Delta u \cdot v_0\, dx + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, Tv \right\rangle + \int_\Omega (-\Delta u) \cdot \varepsilon(Tv)\, dx =$$

$$= -\int_\Omega \Delta u \cdot \underbrace{(v_0 + \varepsilon(Tv))}_{=v}\, dx + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, Tv \right\rangle =$$

$$= \underline{-\int_\Omega \Delta u \cdot v\, dx + \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, Tv \right\rangle}$$

cbd.