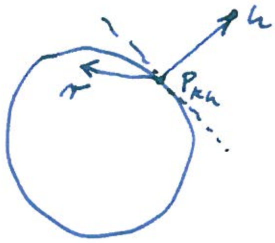
20/3 2015

VĚTA

Buď
- V … Hilbertův prostor
- $\emptyset \neq K \subset V$ konvexní uzavřená množina

Pak

$$\boxed{\forall u \in V \ \exists! \, P_K u \in K : \|u - P_K u\| = \min_{v \in K} \|u - v\|}$$



Navíc: $\forall u \in V$:

$$P_K u \in K : \|u - P_K u\| = \min_{v \in K} \|u - v\|$$

$$\Updownarrow \ (*)$$

$$P_K u \in K : \forall v \in K : (u - P_K u, v - P_K u) \leq 0$$

Důkaz

a) **Existence**. Buď $(v_n) \subset K$ taková, že $\boxed{\|u - v_n\| \to \inf_{v \in K} \|u - v\|}$

Protože (v_n) je (zřejmě) omezená, existuje $P_K u \in V$ tak, že (po případném vybrání) $v_n \rightharpoonup P_K u$.

Odtud $u - v_n \rightharpoonup u - P_K u$, a proto (norma je slabě zdola polospojitá):

$$\boxed{\|u - P_K u\| \leq \liminf \|u - v_n\| = \inf_{v \in K} \|u - v\|};$$

a protože $P_K u \in K$ $\left(\begin{array}{l} (v_n) \subset K \ldots \text{konvexní, uzav.} \\ v_n \rightharpoonup P_K u \end{array} \right)$,

plyne odtud

$$\|u - P_K u\| = \min_{v \in K} \|u - v\|$$

cbd.

b) Důkaz ekvivalence (*)

„⇓" Buď $v \in K$ dáno a definujme

$$\boxed{h(t) := \|u - tv - (1-t)P_K u\|^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$$

Pak $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle$: $h(t) = \|u - (\underbrace{tv + (1-t)P_K u}_{\in K})\|^2 \geq \underbrace{\|u - P_K u\|^2}_{= h(0)}$,

a proto, existuje-li $h'_+(0)$, je $h'_+(0) \geq 0$.

$\forall t \in \langle 0, 1 \rangle$: $h(t) = (u - P_K u - t(v - P_K u), u - P_K u - t(v - P_K u)) =$

$$= (u - P_K u, u - P_K u) - 2t(u - P_K u, v - P_K u) + t^2 (v - P_K u, v - P_K u),$$

takže $h'_+(0) = -2(u - P_K u, v - P_K u) \geq 0$,

a proto $(u - P_K u, v - P_K u) \leq 0$ cbd.

„⇑" Buď $v \in K$ a opět uvažujme pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$h(t) := (u - P_K u, u - P_K u) \underbrace{- 2t \underbrace{(u - P_K u, v - P_K u)}_{\leq 0}}_{\geq 0} + t^2 \underbrace{(v - P_K u, v - P_K u)}_{\geq 0},$$

takže $h(1) \geq h(0)$

$$\|u - v\|^2 \geq \|u - P_K u\|^2,$$ což jsme měli dokázat

($v \in K$ bylo zvoleno libovolně) cbd.

Cbd.

29/3 2015

3

c) jednoznačnost

$$\left.\begin{aligned}\forall v\in K:\ &(u-P_K u,\ v-P_K u)\le 0\\ &(u-\overline{P_K u},\ v-\overline{P_K u})\le 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}&(u-P_K u,\ \overset{v}{\overline{P_K u}}-P_K u)\le 0\\ &(u-\overline{P_K u},\ \underset{v}{P_K u}-\overline{P_K u})\le 0\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$0\le \|\overline{P_K u}-P_K u\|^2 = (\overline{P_K u}-P_K u,\ \overline{P_K u}-P_K u)\le 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\overline{P_K u}=P_K u}$$

cbd.

CBD.

VĚTA Za situace z předchozí věty pro projekci $P_K : V\to K$ platí

$$\boxed{\forall u,v\in V:\ \|P_K u-P_K v\|\le\|u-v\|}$$

(tzn. P_K je tzv. neexpanzivní, a proto spojité zobrazení)

Důkaz.

$$\|P_K u-P_K v\|^2=\overbrace{(P_K u-u,\ P_K u-P_K v)}^{\le 0\ \dots\ \text{viz předchozí věta}\ \dots}+\overbrace{(v-P_K v,\ P_K u-P_K v)}^{\le 0}+$$

$$+(u-v,\ P_K u-P_K v)\underset{\text{CSB nerovnost}}{\le}\|u-v\|\cdot\|P_K u-P_K v\|$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\|P_K u-P_K v\|\le\|u-v\|}$$

CBD.

Poznámka. Okrem v Banachových prostorech V neplatí:

$$\emptyset \neq K \subset V \text{ ... uzav., konvexní}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u \in V \; \exists! \, P_K u \in K : \; \|u - P_K u\| = \min_{v \in K} \|u - v\|$$

Příklad

c ... množina všech konvergentních reálných posloup.

$$(x_n) \in c \; \dots \; \|(x_n)\| := \sup_n |x_n|$$

$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$$

$$\alpha (x_n) := (\alpha x_n)$$

} ... Banachův prostor

c_0 ... množina všech reálných posloupností s limitou 0 } uzavřený podprostor c (a tedy konvexní uzav. podmnožina)

a) $x = \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \in c$

$\operatorname{dist}(x, c_0) = 1$

$y_1 = 0, 0, 0, \dots \in c_0$

$y_2 = \frac{2}{3}, 0, 0, \dots \in c_0$

$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = 1$

... nejednoznačnost nejbližšího prvku

b) $M := \left\{ (x_n) \in c_0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0 \right\}$ ... uzavřený podprostor Banachova prostoru c_0

$$x = \left(\frac{1}{2^n} \right) \in c_0$$

$\operatorname{dist}(x, M) = \frac{1}{3}$, ale $\forall y \in M : \|x - y\| > \frac{1}{3}$

... neexistence nejbližšího prvku

(viz Lukeš – ZFA – str. 11)

5

20/3 2015

VĚTA. Nechť

- V je uniformně konvexní Banachův prostor

  (tzn. $\forall \varepsilon \in (0,2\rangle\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in V: \left[\left.\begin{matrix} \|x\| = \|y\| = 1 \\ \|x-y\| \geq \varepsilon \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\| \tfrac{1}{2}(x+y) \right\| \leq 1 - \delta \right]$)

- $\emptyset \neq K \subset V$ je uzavřená, konvexní

Pak

$$\boxed{\forall u \in V\ \exists!\, P_K u \in K : \|u - P_K u\| = \min_{v \in K} \|u - v\|}$$

Navíc: zobrazení $P_K : V \to K$ je spojité

(Lukeš – ZFA – str. 169)

(**Poznámka**

Je-li V navíc Hilbertův a K podprostor (uzav.), je P_K lineární (spojité)

Obecně ale neplatí!:

$$\left.\begin{matrix} V \ldots \text{uniformně konvexní} \\ K \ldots \text{uzav. podprostor} \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_K \text{ je lineární.}$$)

(Protipříklad se dá najít v ℓ^p pro $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$.)

20/3 2015

VĚTA

Buď

- V … Hilbertův prostor,
- $\emptyset \neq K \subset V$ … konvexní, uzavřená,
- $f \in V^*$,
- $A : V \to V^* \equiv V$,
- $\rho > 0$.

Pak

$$u \in K: \quad \forall v \in K: \ \underbrace{\langle Au, v-u \rangle}_{= (Au, v-u)} \geq \underbrace{\langle f, v-u \rangle}_{= (f, v-u)}$$

$$\Updownarrow$$

$$u \in K: \quad u = P_K(u - \rho(Au - f))$$

Důkaz

$$u \in K \qquad u = P_K(u - \rho(Au - f))$$

$$\Updownarrow \quad \text{viz věta na str. 1}$$

$$\forall v \in K: \ (u - \rho(Au - f) - \underbrace{u}_{= P_K(u-\rho(Au-f))}, v - u) \leq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall v \in K: \ -\rho(Au - f, v - u) \leq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall v \in K: \ (Au - f, v - u) \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall v \in K: \ (Au, v - u) \geq (f, v - u)$$

CBD.

VĚTA

Nechť
- V … Hilbertův prostor,
- $\emptyset \neq K \subset V$ … uzavřená, konvexní,
- $A : V \to V^* \cong V$:

$$\exists M > 0 \ \forall u, v \in V : \ \|Au - Av\| \leq M \cdot \|u - v\|$$
(lipschitzovsky spojitost),

$$\exists c > 0 \ \forall u, v \in V : \ (Au - Av, u - v) \geq c\|u - v\|^2$$
($\approx$ eliptičnost)

- $f \in V^* \cong V$

Pak
$$\boxed{\exists! \, u \in K \ \forall v \in K : (Au, v - u) \geq f(v - u)} \quad (*)$$

Navíc. Zvolíme-li (libovolně) $\rho \in \left(0, \frac{2c}{M^2}\right)$, $u_0 \in V$,
$$\boxed{u_n := P_K(u_{n-1} - \rho(Au_{n-1} - f))}, \text{ je}$$

$$u_n \to u \ (\dots \text{řešení } (*)).$$

Důkaz. Už víme (viz str. 6), že $u \in K$ je řešením $(*)$ právě tehdy, je-li pevným bodem zobrazení
$$\boxed{\begin{array}{l} T : V \to V \\ Tu := P_K(u - \rho(Au - f)) \end{array}}$$
(pro jakékoliv $\rho > 0$)

Stačí tedy ukázat, že T je kontraktivní.

20/3 2015

$$0 \le \|Tu - Tv\|^2 \le \|u - \mu(Au-f) - (v - \mu(Av-f))\|^2 =$$

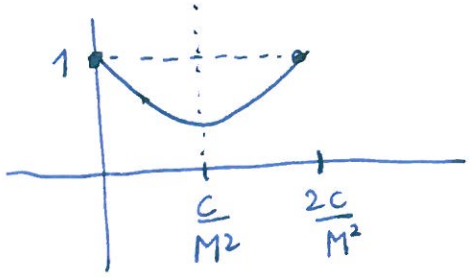
projekce P_K je nonexpanzivní – viz str. 3

$$= \|u - v - \mu(Au - Av)\|^2 = \underbrace{(u-v,u-v)}_{=\|u-v\|^2} - 2\mu \underbrace{(Au-Av,u-v)}_{\ge c\|u-v\|^2} +$$

$$+ \mu^2 \underbrace{(Au-Av,Au-Av)}_{\le M^2 \cdot \|u-v\|^2} \le \underbrace{(1 - 2\mu c + \mu^2 \cdot M^2)}_{\ge 0\,!} \cdot \|u-v\|^2$$

Odtud plyne, že T je kontraktivní, je-li

$$h(\mu) := 1 - 2c\mu + \mu^2 M^2 < 1$$



$h'(\mu) = 0$

$\Updownarrow$

$\mu = \frac{c}{M^2}$ … bod minima h s hodnotou ≥ 0

Tedy T je kontraktivní s konstantou

$$q = \sqrt{1 - 2\mu c + \mu^2 M^2} < 1,$$

je-li $\mu \in (0, \frac{2c}{M^2})$

CBD.

20/3 2015

Věta (o Němyckého operátoru)

Nechť

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ... oblast,
- $h: \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,
- pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^m$: $h(\cdot, \xi)$ je měřitelná na Ω
- pro s.v. $x \in \Omega$: $h(x, \cdot)$ je spojitá na $\mathbb{R}^m$

} h splňuje Carathéodoryovy vlastnosti

- $\exists g \in L^2(\Omega)\ \exists c > 0$:

$$|h(x, \xi_1, \dots, \xi_m)| \le g(x) + c \sum_{i=1}^{m} |\xi_i| .$$

Pak operátor H, který m-tici funkcí $u_1, \dots, u_m \in L^2(\Omega)$ přiřadí funkci $\boxed{H(u_1, \dots, u_m)(x) = h(x, u_1(x), \dots, u_m(x))}$, je spojitý operátor z $(L^2(\Omega))^m$ do $L^2(\Omega)$.

20/3 2015

PŘÍKLAD. Uvažujme úlohu (porovnejme se Signoriniho problémem)

$$(*)\quad \begin{cases} -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_j(x,u,\nabla u)\right) + a_0(x,u,\nabla u) = f \ \text{v}\ \Omega, \\ u = 0 \ \text{na}\ \Gamma_D, \\ \sum_{j=1}^{N} a_j(x,u,\nabla u) n_j = 0 \ \text{na}\ \Gamma_N, \\ \left. \begin{array}{l} u \geq 0, \ \sum_{j=1}^{N} a_j(x,u,\nabla u) n_j \geq 0 \\ u \cdot \sum_{j=1}^{N} a_j(x,u,\nabla u) n_j = 0 \end{array} \right\} \text{na}\ \Gamma_C, \end{cases}$$

kde
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ... omezená oblast s lipschitzovskou hranicí,
- $f \in L^2(\Omega)$
- $a_j : \Omega \times \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ splňují Carathéodoryho podmínky
- $\exists g \in L^2(\Omega)\ \exists c > 0 : \ |a_j(x, \xi_0, \dots, \xi_N)| \leq g(x) + c\sum_{i=0}^{N} |\xi_i|$
- $\exists m > 0 : \ |a_j(x,\xi) - a_j(x,\zeta)| \leq m \cdot \left(\sum_{i=0}^{N} |\xi_i - \zeta_i|^2\right)^{1/2}$,
- $\exists c > 0 : \ \sum_{j=0}^{N} \left(a_j(x,\xi) - a_j(x,\zeta)\right)(\xi_j - \zeta_j) \geq c \cdot \sum_{j=0}^{N} |\xi_j - \zeta_j|^2$

(pro s.v. $x \in \Omega$ a všechna $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$)

Buď $\boxed{V = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : \ Tv = 0 \text{ na } \Gamma_D\}}$

$$A : V \to V^* \equiv V : \quad \langle Au, v\rangle := \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} a_j(x,u,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x,u,\nabla u) v \, dx$$

$\boxed{K = \{v \in V : \ Tv \geq 0 \text{ na } \Gamma_C\}}$, $\quad \langle f, v\rangle := \int_\Omega f v \, dx$

Slabé řešení $(*)$ ... řešení variační nerovnice

$$\boxed{(**) \ .. \quad u \in K : \ \forall v \in K : \ \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle}$$

K důkazu existence a jednoznačnosti řešení slabé variační rovnice aplikujeme větu ze strany 7:

$$\|Au - Av\| = \sup_{\|\varphi\| \le 1} \langle Au - Av, \varphi \rangle =$$

$$= \sup_{\|\varphi\| \le 1} \int_\Omega \sum_{j=1}^N \left(a_j(x,u,\nabla u) - a_j(x,v,\nabla v)\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \left(a_0(x,u,\nabla u) - a_0(x,v,\nabla v)\right) \varphi \, dx \le$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\le} \sup_{\|\varphi\| \le 1} \sum_{j=1}^N \left(\int_\Omega |a_j(x,u,\nabla u) - a_j(x,v,\nabla v)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_\Omega |a_0(x,u,\nabla u) - a_0(x,v,\nabla v)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_\Omega |\varphi|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\underset{\text{předpoklady na } a_j}{\le} m \cdot (N+1) \cdot \left[\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 + |u-v|^2 \right]^{1/2} = m \cdot (N+1) \cdot \|u-v\|_{1,2}$$

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = \sum_{j=1}^N \int_\Omega \left(a_j(x,u,\nabla u) - a_j(x,v,\nabla v)\right) \frac{\partial (u-v)}{\partial x_j} +$$

$$+ \left(a_0(x,u,\nabla u) - a_0(x,v,\nabla v)\right)(u-v) \, dx \ge$$

$$\underset{\text{předpoklady na } a_j}{\ge} c \cdot \int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 + |u-v|^2 \, dx = c \|u-v\|_{1,2}^2$$

Tedy:

$$\boxed{\text{Variační rovnice } (**) \text{ má právě jedno řešení.}}$$