VĚTA Nechť je

- V ... Banachův prostor
- $\emptyset \neq K \subset V$ konvexní, uzavřená
- pro $u \in K$ existuje gâteauxova derivace $J'(u) \in V^*$
- $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$

Pak

$$\boxed{\forall v \in K : \langle J'(u), v-u \rangle \geq 0}$$

Dk.

$$\langle J'(u), v-u \rangle = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \underbrace{\frac{J(u+\overbrace{\lambda(v-u)}^{\in K \text{ pro } \lambda \in \langle 0,1 \rangle}) - J(u)}{\lambda}}_{\geq 0 \text{ pro každé } \lambda \in \langle 0,1 \rangle} \geq 0$$

cbd.

Definice $K \subset V$ konvexní

$J : K \to \mathbb{R}$ se nazývá

konvexní na K, pokud

$$\boxed{\forall u, v \in K \ \forall t \in (0,1) : \quad J(tu + (1-t)v) \leq t J(u) + (1-t) J(v)}$$

ostře konvexní na K, pokud (ryze)

$$\boxed{\forall u, v \in K \ \forall t \in (0,1) : \quad J(tu + (1-t)v) < t J(u) + (1-t) J(v)}$$

VĚTA Buď

$K \subset V$ konvexní

$J : V \to \mathbb{R}$ Gâteauxovsky diferencovatelný na K

Pak

$$\boxed{\begin{gathered} J \text{ je konvexní na } K \\ \Updownarrow \\ \forall u, v \in K : \; J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), v-u \rangle \end{gathered}}$$

Důkaz „$\Downarrow$"

$u, v \in K$ dáno

$$\forall t \in (0,1) : \; J(u + t(v-u)) \leq t J(v) + (1-t) J(u)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{J(u+t(v-u)) - J(u)}{t} \leq J(v) - J(u)$$

$$\Big\downarrow \; t \to 0+$$

$$\langle J'(u), v-u \rangle \leq J(v) - J(u) \quad \text{cbd.}$$

„$\Uparrow$"

Buď $u, v \in K$ a $t \in (0,1)$ dáno.

Označme $w = tu + (1-t)v \in K$

Pak (z předpokladu):

$$\begin{aligned} \langle J'(w), v - w \rangle &\leq J(v) - J(w) \quad && / \cdot (1-t) \\ \langle J'(w), u - w \rangle &\leq J(u) - J(w) \quad && / \cdot t \end{aligned} \quad +$$

$$\underbrace{\langle J'(w), \underbrace{\underbrace{tu + (1-t)v}_{=w} - w(\underbrace{t+1-t}_{=1})}_{=0} \rangle}_{=0} \leq t J(u) + (1-t) J(v) - J(w)$$

$$\Downarrow$$

$$J(tu + (1-t)v) = J(w) \leq t J(u) + (1-t) J(v) \quad \text{cbd.}$$

CBD.

VĚTA Buď

- V … Banachův
- $\emptyset \neq K \subset V$ … konvexní, uzavřená
- $J : V \to \mathbb{R}$ – konvexní na K
  – gâteaux. dif. na K

Pak

$$u \in K : \forall v \in K : \langle J'(u), v-u \rangle \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$u \in K : J(u) = \min_{v \in K} J(v)$$

Důkaz „$\Uparrow$" … viz větu na str. 1

„$\Downarrow$"

Buď $u \in K$ takové, že platí $\forall v \in K : \langle J'(u), v-u \rangle \geq 0$.

Pak

$$\forall v \in K : 0 \leq \langle J'(u), v-u \rangle \leq J(v) - J(u)$$

Viz větu na str. 2

$$\Downarrow$$

$$\forall v \in K : J(u) \leq J(v)$$

CBD.

VĚTA Buď

- V ... reflexivní (Banachův) prostor
- $K \subset V$ uzavřená, konvexní, $K \neq \emptyset$
- $J : K \to \mathbb{R}$ – koercivní na K (je-li K neomezená), tzn.

  tzn. $\boxed{\lim_{\substack{v \in K \\ \|v\| \to \infty}} J(v) = \infty}$

  – slabě zdola polospojitý na K, tzn.

  $$\boxed{\left.\begin{array}{l} (u_n) \subset K \\ u_n \rightharpoonup u \end{array}\right\} \Rightarrow J(u) \leq \liminf J(u_n)}$$

  víme, že $u \in K$ ... uzav. konvexní

Pak

$\boxed{\text{existuje } u \in K \text{ taková, že } J(u) = \min_{v \in K} J(v)}$

Důkaz. Buď $(u_n) \subset K : J(u_n) \to \inf_{v \in K} J(v)$ (existence plyne z def. infima)

koercivita J na K $\Downarrow$

(u_n) je omezená

V je reflexivní $\Downarrow$

$\exists u \in V : u_n \rightharpoonup u$ (po vybrání) $\Rightarrow u \in K$ (K je uzav., konv.)

slabá polospoj. J $\Downarrow$

$u \in K : J(u) \leq \liminf J(u_n) = \lim J(u_n) = \inf_{v \in K} J(v)$

$\Downarrow$

$J(u) = \min_{v \in K} J(v)$

CBD.

13/3 2015

VĚTA Buď
- V reflexivní (Banachův prostor)
- $\emptyset \neq K \subset V$ uzavř., konvexní
- $J : K \to \mathbb{R}$ – spojitý na K
  – konvexní na K

Pak J je slabě zdola polospojitý na K

Důkaz a) Nejdříve dokážeme ekvivalenci:

$$\boxed{J \text{ je slabě zdola polospojitý na } K} \iff \boxed{\forall a \in \mathbb{R} : M_a = \{u \in K : J(u) \le a\} \text{ je slabě uzavřená}}$$

„$\Rightarrow$“
$$\left.\begin{array}{l} (u_n) \subset M_a \subset K \\ u_n \rightharpoonup u \end{array}\right\} \Rightarrow u \in K$$
$$\Downarrow$$
$$J(u) \le \liminf J(u_n) \le a$$
$$\Rightarrow u \in M_a$$

dok.

„$\Leftarrow$“ předpokládejme sporem
- $\forall a \in \mathbb{R}$: M_a je slabě uzavřená
- J není slabě zdola polospojitý na K

$$\Downarrow$$

$$\exists (u_n) \subset K,\ u_n \rightharpoonup u \in K : J(u) > \liminf J(u_n).$$

Zvolme $a \in \mathbb{R}$: $\liminf J(u_n) < a < J(u)$

Pak (po případném vybrání) platí: $(u_n) \subset M_a$.

Protože
- $u_n \overset{\in M_a}{\rightharpoonup} u$
- M_a je slabě uzavřená

, je $u \in M_a$, tzn. $J(u) \le a$

spor dok.

dok.

1) Následující úvaha je snadná:

$\forall a \in \mathbb{R}$: M_a je uzavřená (plyne ze spojitosti J)

M_a je konvexní (z konvexity J a K)

$$\Big(\forall u, v \in M_a: \ J(\underbrace{tu + (1-t)v}_{\in K}) \le tJ(u) + (1-t)J(v) \overset{u,v \in M_a}{\le} ta + (1-t)a = a \ \dots \Big)$$

$$\Downarrow$$

$\forall a \in \mathbb{R}$: M_a je slabě uzavřená

$\Downarrow$ (viz a))

J je slabě zdola polospojitý na K cbd.

CBD.

Poznámka. Buď $T: V \to V^*$

$$\boxed{\text{Variační nerovnice: hledejme } u \in K: \ \forall v \in K: \ \langle Tu, v-u \rangle \ge 0}$$

Je-li T potenciální, tzn. že existuje Gâteauxovsky diferencovatelný $J: V \to \mathbb{R}$ takový, že $\boxed{J' = T}$, je

$$\boxed{\begin{array}{l} u \in K \\ J(u) = \min\limits_{v \in K} J(v) \end{array}} \implies \boxed{\begin{array}{l} u \in K \\ \forall v \in K: \ \langle \underset{J'(u)}{\underset{\parallel}{Tu}}, v-u \rangle \ge 0 \end{array}}$$

13/3 2015

Často má T tvar $Tu = Au - f$,
kde $A : V \to V^*$
$f \in V^*$.

Pak
$$\boxed{\begin{array}{c}\langle Tu, v-u\rangle \geq 0 \\ \Updownarrow \\ \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle\end{array}}$$

Pozorování. Je-li A potenciální (tzn. $A = J_A'$ pro nějaké $J_A : V \to \mathbb{R}$), je potenciální i T, přičemž

$$\boxed{T = J', \text{ kde } J = J_A - f}$$

$$\Big(J(w) = J_A(w) - f(w)$$
$$J'(w) = J_A'(w) - f = Au - f = Tw \Big)$$