

VĚTA

Nechť je

13/3 2015

- V ... Banachův prostor
- $\emptyset \neq K \subset V$ konvexní, uzavřený
- pro $u \in K$ existuje gáňkanová funkce $J(u) \in V^*$
- $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$

Paž

$$\forall v \in K: \langle J'(u), v - u \rangle \geq 0$$

Důk.

$$\langle J'(u), v - u \rangle = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \underbrace{\frac{J(u + \lambda(v - u)) - J(u)}{\lambda}}_{\geq 0} \geq 0$$

$\forall \lambda \in K$ pro $\lambda \in (0, 1)$
 $\forall \lambda > 0$ pro každé $\lambda \in (0, 1)$

cbd

Definice

$K \subset V$ konvexní
 $J: K \rightarrow \mathbb{R}$ se maximální

konvexní na K , pokud

$$\forall u, v \in K \quad \forall t \in (0, 1):$$

$$J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v)$$

striktně konvexní na K , pokud (týž)

$$\forall u, v \in K \quad \forall t \in (0, 1):$$

$$J(tu + (1-t)v) < tJ(u) + (1-t)J(v)$$

VĚTA Bud'

$K \subset V$ konvexní

$J: V \rightarrow \mathbb{R}$ gâteauxovsky diferencovatelní na K
Pak

J je konvexní na K
 \Downarrow
 $\forall u, v \in K: J(v) \geq J(u) + \langle J'(u), v-u \rangle$

Důkaz

$u, v \in K$ dáno

$\forall t \in (0, 1): J(u + t(v-u)) \leq tJ(v) + (1-t)J(u)$

\Downarrow

$$\frac{J(u + t(v-u)) - J(u)}{t} \leq J(v) - J(u)$$

$\downarrow t \rightarrow 0+$

$$\langle J'(u), v-u \rangle \leq J(v) - J(u) \quad \text{důl.}$$

↑

Známe $u, v \in K$ a $t \in (0, 1)$ dáno.

Obzvláště $w = tu + (1-t)v \in K$

Pak (z předpokladu):

$\langle J'(w), v-w \rangle \leq J(v) - J(w) \quad / \cdot (1-t) +$
 $\langle J'(w), u-w \rangle \leq J(u) - J(w) \quad / \cdot t$

$$\langle J'(w), \underbrace{tu + (1-t)v - w}_{=w} \underbrace{(t+1-t)}_{=1} \rangle \leq tJ(u) + (1-t)J(v) - J(w)$$

$$\underbrace{\langle J'(w), w \rangle}_{=0} \leq 0$$

$$J(tu + (1-t)v) = J(w) \leq tJ(u) + (1-t)J(v)$$

důl.
C.B.D.

- $V \dots$ Banachov
- $\emptyset \neq K \subset V \dots$ konvexní, uzavřená
- $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ - konvexní na K
- gâteaux. dof. na K

Pak

$$u \in K : \forall r \in K : \langle J'(u), r - u \rangle \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$u \in K : J(u) = \min_{r \in K} J(r)$$

Důkaz



... viz úloha na str. (1)

Bud' $u \in K$ lokální, ať platí $\forall r \in K : \langle J'(u), r - u \rangle \geq 0$.

Pak

$$\forall r \in K : 0 \leq \langle J'(u), r - u \rangle \leq J(r) - J(u)$$

Viz úloha na str. (2)

$$\Downarrow$$

$$\forall r \in K : \underline{J(u) \leq J(r)}$$

CBD

• V ... reflexivní (Banachov) prostor

• $K \subset V$ warmimé, konvexní
+
 \emptyset

• $J: K \rightarrow \mathbb{R}$

- koercivní na $K \neq \emptyset$ (je-li K normován), tzn.

$$\begin{aligned} \text{tzn. } & \lim_{\substack{v \in K \\ \|v\| \rightarrow \infty}} J(v) = \infty \end{aligned}$$

- stati zadala položeno fidny na K , tzn.

$$\left. \begin{aligned} (u_n) \subset K \\ u_n \rightarrow u \end{aligned} \right\} \Rightarrow J(u) \leq \liminf J(u_n)$$

↓
u = min, tzn. $u \in K$... warm.
konvexní

Par

existuje $u \in K$ takový, tzn. $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$

Důkaz

Budí $(u_n) \subset K : J(u_n) \rightarrow \inf_{v \in K} J(v)$

koercivní J na K → ∥

(plně K def. reflexivní)

(u_n) je omezený
↓
 J je reflexivní → ∥

∃ $u \in V : u_n \rightarrow u$ (po vybrání) ⇒ $u \in K$
↓
obě položeno → ∥
↑
 K je warm., omezený

$u \in K$: $J(u) \leq \liminf J(u_n) = \lim J(u_n) = \inf_{v \in K} J(v)$

∥
 $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$

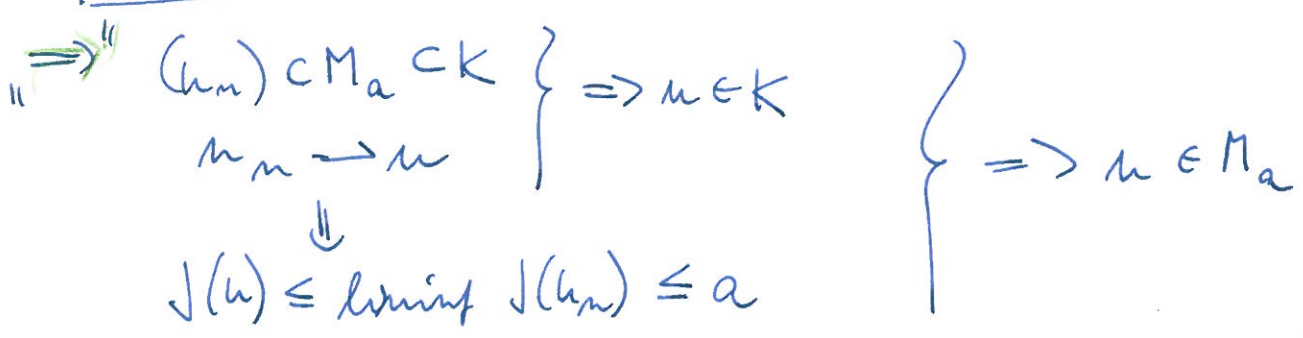
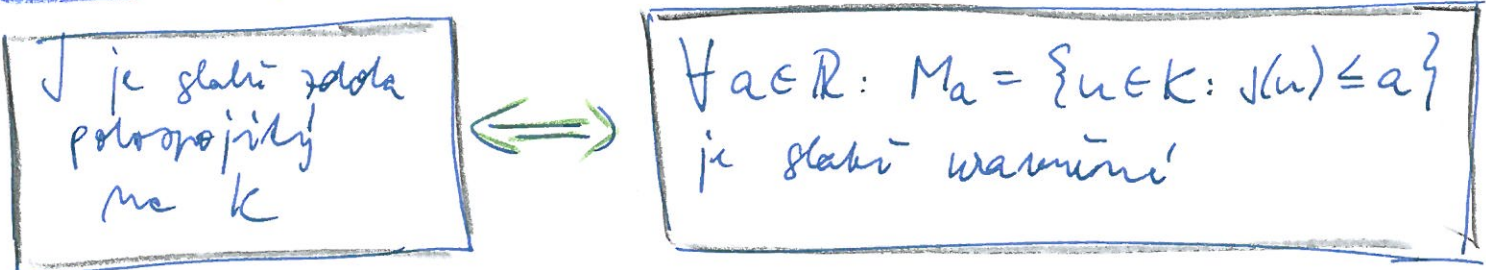
CBD

Bud' V reálnou (Banachov) prostorem

- $\emptyset \neq K \subset V$ uzavřená, konvexní
- $J: K \rightarrow \mathbb{R}$
 - spojitý na K
 - konvexní na K

Pak J je slabě zdola poloospojitý na K

Děkuj a) Njadrním ekvivalenci:



obd.

" \impliedby " přímouhelníkovým sporem

- $\forall a \in \mathbb{R}: M_a$ je slabě uzavřená
- J není slabě zdola poloospojitý na K

\Downarrow

$\exists (u_n) \subset K: u_n \rightarrow u \in K: J(u) > \liminf J(u_n)$

zvolme $a \in \mathbb{R}: \liminf J(u_n) < a < J(u)$

Pak (po případném vybrání) platí: $(u_n) \subset M_a$.

Prostředí

- $u_n \xrightarrow{M_a} u$, je $u \in M_a$, tzn. $J(u) \leq a$
- M_a je slabě uzavřená

span obd.
obd.

1) Najvišji izbor je suadna:

$\forall a \in \mathbb{R}$: M_a je varijanti (plynu se svojilosti J)

M_a je konveksi (\exists konveksni J a K)

$$\begin{aligned} \forall u, v \in M_a: \\ (J(tu + (1-t)v)) &\leq tJ(u) + (1-t)J(v) \leq \\ &\leq ta + (1-t)a = a \dots \end{aligned}$$



$\forall a \in \mathbb{R}$: M_a je slabi varijanti

$\{v \mid v \geq a\}$

J je slabi zloke polozajihj m K

Vol.
CBD.

Poznamka. Buda $T: V \rightarrow V^*$

Varianti mrova:
 gledjme $u \in K$:
 $\forall r \in K: \langle Tu, r - u \rangle \geq 0$

J -lo T polinevalni, tm. ki resoluje gatanovny difinicioni $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ skoni, ki $J' = T$

$u \in K$
 $J(u) = \min_{r \in K} J(r)$



$u \in K$
 $\forall r \in K: \langle Tu, r - u \rangle \geq 0$

Často má T tvar $Tu = Au - f$,

tedy $A: V \rightarrow V^*$
 $f \in V^*$.

13/3
2015

Pak

$$\begin{aligned} \langle Tu, v - u \rangle &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \langle Au, v - u \rangle &\geq \langle f, v - u \rangle \end{aligned}$$

Průvodič. Je-li A potenciální (tzn. $A = J'_A$ pro nějaké $J_A: V \rightarrow \mathbb{R}$), je potenciální

i T , přičemž

$$T = J', \text{ kde } J = J_A - f$$

$$(J(u) = J_A(u) - f(u))$$

$$\underline{J'(u)} = J'_A(u) - f = Au - f = \underline{Tu}$$