# VARIAČNÍ NEROVNICE



**Př. 1**

$$J(x,y) := (x-2)^2 + (y-2)^2$$

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \le 2\}$$

Hledáme $u = (x_0, y_0) \in K$ tak, aby

$$\boxed{J(u) = \min_{(x,y)\in K} J(x,y)}$$

**Nutná podmínka:**

$$\underset{\substack{\| \\ (v_1, v_2)}}{\forall v} \in K : \quad \underset{\substack{\| \\ J'(u)\cdot(v-u)}}{\boxed{\langle J'(u), v-u \rangle \ge 0}} \;,$$

tzn. $2(x_0-2)(v_1-x_0) + 2(y_0-2)(v_2-y_0) \ge 0$

$$2x_0(v_1-x_0) + 2y_0(v_2-y_0) \ge 4(v_1-x_0) + 4(v_2-y_0)$$

$$\underbrace{x_0\cdot(v_1-x_0) + y_0\cdot(v_2-y_0)}_{=: a(u, v-u)} \ge \underbrace{2(v_1-x_0) + 2(v_2-y_0)}_{=: F(v-u)} \;,$$

kde $a(u,v) = (u,v)$ ... skal. součin ... bilineární forma (spoj., eliptická, symetrická)

$F(v) = 2v_1 + 2v_2$ ... spoj. lineární funkcionál

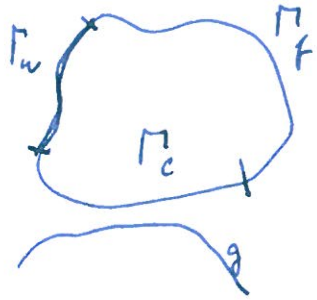
$$\boxed{\text{Hledáme } u \in K \text{ takové, aby } \; \forall v \in K : \; a(u, v-u) \ge F(v-u)}$$

($K \subset V := \mathbb{R}^2$ neprázdná, konvexní, uzavřená)

# Př. 2 Signoriniho problém

6/3 2015

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_u$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_f$$
$$\left.\begin{array}{l} u \geq g \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(u-g) = 0 \end{array}\right\} \text{na } \Gamma_c$$




- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ... omezená oblast s hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c$
- $f \in L^2(\Omega)$
- $g \in L^2(\Gamma_c)$

## Slabá formulace

Hledáme $u \in K = \{v \in H^1(\Omega) : Tv = 0 \text{ na } \Gamma_u,\ Tv \geq g \text{ na } \Gamma_c\}$ tak, aby

$$\forall v \in K: \quad \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla(v-u)\,dx}_{a(u,v-u)} \geq \underbrace{\int_\Omega f(v-u)\,dx}_{F(v)} \qquad (*)$$

**Pozorování** pokud slabé řešení $\boxed{u \in K}$ i „data" úlohy dost hladké, je $u$ i klasickým řešením Signoriniho úlohy.

**Nástin důkazu**

a) Z $(*)$ plyne, že $\forall \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}): v = u \pm \varphi \in K$,

a proto $\displaystyle\int_\Omega -\Delta u(\pm\varphi) \geq \int_\Omega f(\pm\varphi) \Rightarrow \int_\Omega -\Delta u\,\varphi = \int_\Omega f\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{-\Delta u = f}$$

6/3 2015

3

1) $\int \nabla u \nabla(v-u) \geq \int f(v-u)$ $\quad \forall v \in K$,

$$\Downarrow$$

$$\int_\Omega -\Delta u\,(v-u) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u)$$

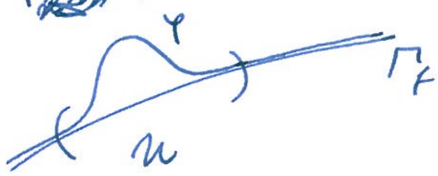
$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\int_\Omega (\underbrace{-\Delta u - f}_{=0})(v-u)}_{=0} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u) \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\int_{\Gamma_u} \frac{\partial u}{\partial n}\underbrace{(v-u)}_{=0}}_{=0} + \int_{\Gamma_f} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u) + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u) \geq 0$$

Kdyby $\frac{\partial u}{\partial n} \neq 0$ na $\Gamma_f$, existuje „okolí" $\mathcal{U} \subset \Gamma_f$ tak, že $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ (nebo $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$) na $\mathcal{U}$. Volme $\varphi$, $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$.




Pak $v = u - \varphi \in K$ (nebo $v = u + \varphi$), a proto

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(-\varphi) = \underbrace{\int_{\mathcal{U}} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{>0} \underbrace{(-\varphi)}_{<0}}_{<0} < 0,$$ a to je spor.

$$\left(\text{nebo } \int \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{<0} \underbrace{\varphi}_{>0} < 0\right)$$

Takže

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ na } \Gamma_f}$$

c) Víme $\int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K$

Předpokládejme sporem, že neplatí $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$ na $\Gamma_c$, tzn. že existuje „okolí" $\mathcal{U} \subset \Gamma_c$ tak, že $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ na $\mathcal{U}$.

Volme $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$.


Pak $v = u + \varphi \in K$, a proto

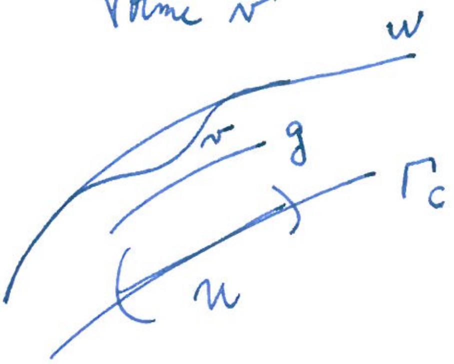
$$0 \leq \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}\varphi = \int_{\mathcal{U}} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{<0} \cdot \underbrace{\varphi}_{>0} < 0,$$ a to je spor.

Takže $\boxed{\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \text{ na } \Gamma_c}$

d) Zbývá dokázat, že $\frac{\partial u}{\partial n}(u-g) = 0$ na $\Gamma_c$.

Sporem. Předpokládejme, že existuje „okolí" $\mathcal{U} \subset \Gamma_c$ takové, že $\frac{\partial u}{\partial n} > 0 \wedge u - g > 0$ v $\mathcal{U}$.

Volme $v$




Pak

$$0 \leq \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u) = \int_{\mathcal{U}} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{>0} \underbrace{(v-u)}_{<0} < 0,$$

a to je spor

Platí $\boxed{\frac{\partial u}{\partial n}(u-g) = 0 \text{ na } \Gamma_c}$

Cbd

**Věta.** Buď

- $V$ ... Hilbertův prostor
- $\emptyset \subset K \subset V$ ... konvexní, uzavřená množina
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$
  - bilineární
  - spojitá, tzn. $\exists k > 0 \ \forall u, v \in V: \ |a(u,v)| \leq k \|u\| \cdot \|v\|$
  - eliptická, tzn. $\exists c > 0 \ \forall u \in V: \ a(u,u) \geq c \|u\|^2$
  - SYMETRICKÁ, tzn. $\forall u, v \in V: \ a(u,v) = a(v,u)$
- $f \in V^*$

Pak

$u \in K$

$\forall v \in K: \ a(u, v-u) \geq f(v-u)$

... variační nerovnice (VN)

$\Longleftrightarrow$

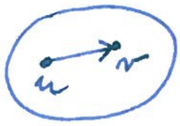
$u \in K$

$J(u) = \min_{v \in K} J(v)$,

kde $J(v) := a(v,v) - 2f(v)$

Navíc $\exists! \, u$ řešící (VN)

**Důkaz.**




a) „$\Longrightarrow$" Buď $v \in K$ dáno. Pak

$$\boxed{J(v)} = J(u + (v-u)) = a(u + (v-u), u + (v-u)) - 2f(u + (v-u)) =$$

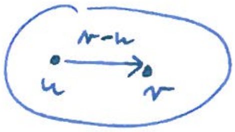
$$= a(u,u) + 2a(u, v-u) + \underbrace{a(v-u, v-u)}_{\geq c\|v-u\|^2 \geq 0} - 2f(u) - 2f(v-u) \geq$$

$\geq 0$ (u řeší (VN))

$$\geq a(u,u) - 2f(u) = \boxed{J(u)}$$

cbd.

b) „$\Leftarrow$" Buď $v \in K$ dáno.



Definujme pro $t \in \langle 0,1 \rangle$:

$$\boxed{h(t) := J(\overbrace{u + t(v-u)}^{\in K})}$$

Pak z předpokladu vyplývá, že $\forall t \in \langle 0,1 \rangle$ platí $J(u) = h(0) \leq h(t)$, a proto existuje-li $h'_+(0)$, je $h'_+(0) \geq 0$.

$$h(t) = a(u+t(v-u), u+t(v-u)) - 2f(u+t(v-u)) =$$
$$= a(u,u) + 2t\,a(u,v-u) + t^2 a(v-u,v-u) -$$
$$-2f(u) - 2t\,f(v-u), \text{ a proto}$$

$$\boxed{0 \leq h'_+(0) = 2a(u,v-u) - 2f(v-u)}$$

cbd.

c) existence $\min_{v \in K} J(v)$

Buď $(u_n) \subset K$ taková, že $J(u_n) \to i := \inf_{v \in K} J(v)$.

Protože
$$J(v) = a(v,v) - 2f(v) \geq c\|v\|^2 - 2\|f\| \cdot \|v\| \to \infty$$
pro $\|v\| \to \infty$,

je posloupnost $(u_n)$ omezená a $i \in \mathbb{R}$.

**Věta** (Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy, Věta 16.2. na str. 142)

Nechť $K$ je konvexní podmnožina NLP $X$.
Potom $\boxed{K \text{ je uzavřená}} \Longleftrightarrow \boxed{K \text{ je slabě uzavřená}}$

$V$ je reflexivní, a proto (po případném vybrání)

$$\boxed{\exists u \in V : u_n \rightharpoonup u} \Longrightarrow \boxed{u \in K}$$

$\|u\|_a := \underbrace{\sqrt{a(u,u)}}_{\text{... skal. součin}}$ ... norma

$$J(u_n) = \|u_n\|_a^2 - 2f(u_n)$$

$\Downarrow$ $u_n \rightharpoonup u$, norma je slabě zdola polospojitý funkcionál

$$\boxed{i} = \lim J(u_n) = \liminf J(u_n) \geq \|u\|_a^2 - 2f(u) = \boxed{J(u)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{J(u) = i = \inf J(v)}$$

Cbd

d) jednoznačnost – je důsledkem následující věty

CBD.

**Věta.** Buď

- $V$... Hilbertův prostor,
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineární, spojitá, eliptická (NE NUTNĚ SYMETRICKÁ!),
- $K \subset V$.. konvexní, uzavřená, neprázdná,
- $f_1, f_2 \in V^*$,
- $u_1, u_2 \in V$
- $\forall v \in K$: $a(u_1, v - u_1) \geq f_1(v - u_1)$ $\quad (*)$

$\qquad a(u_2, v - u_2) \geq f_2(v - u_2)$ $\quad (**)$

Pak

$$\boxed{\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{1}{c} \|f_1 - f_2\|_{V^*}}$$

**Důkaz.** Volme v $(*)$: $v = u_2$,
v $(**)$: $v = u_1$.

Pak

$$a(u_1, u_2-u_1) \geq f_1(u_2-u_1)$$
$$\underset{a(-u_2,\, u_2-u_1)}{\underset{\|}{a(u_2, u_1-u_2)}} \geq f_2(u_1-u_2)$$

$$\Downarrow$$

$$a(u_1-u_2, u_2-u_1) \geq (f_2-f_1)(u_1-u_2) \quad / \cdot (-1)$$

$$\Downarrow$$

$$c\|u_1-u_2\|^2 \leq a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq (f_1-f_2)(u_1-u_2) \leq \|f_1-f_2\| \cdot \|u_1-u_2\|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|u_1-u_2\| \leq \frac{1}{c}\|f_1-f_2\|}$$

CBD.

**VĚTA** Buď

- V… Hilbertův prostor, $\emptyset \neq K \subset V$ uzavřená, konvexní
- $a: V \times V \to \mathbb{R}$ spojitá, eliptická, bilineární
- $f \in V^*$.

Pak

$\exists!\, u \in K$ řešící (VN) $\boxed{\begin{array}{l} u \in K \\ \forall v \in K: \ a(u, v-u) \geq f(v-u) \end{array}}$

**Důkaz** – jednoznačnost už máme dokázanou (viz předchozí věta). Stačí tedy dokázat existenci

Definujme $\forall t \in \langle 0,1 \rangle$:

$$a_t(u,v) := a_S(u,v) + t\, a_A(u,v), \text{ kde}$$

$$a_S(u,v) := \frac{1}{2}\big(a(u,v) + a(v,u)\big) \quad \text{... symetrická část } a$$

$$a_A(u,v) := \frac{1}{2}\big(a(u,v) - a(v,u)\big) \quad \text{... antisymetrická část } a$$

Všimněme si, že

- $a(u,v) = a_1(u,v)$,
- $a_t(u,u) = a(u,u) \geq c\|u\|^2$ ... eliptičnost
- $|a_t(u,v)| \leq k\|u\|\cdot\|v\| + k\|u\|\cdot\|v\|$ ... spojitost
- $|a_A(u,v)| \leq k\|u\|\cdot\|v\|$

**Lemma.** Nechť $\tau \geq 0$ je takové, že $\forall F \in V^*$ existuje řešení (VN):

$$\boxed{\begin{array}{l} u \in K \\ \forall v \in K: \ a_\tau(u, v-u) \geq F(v-u) \end{array}}\,.$$

Pak $\forall t \in \langle \tau, \tau + t_0 \rangle$, kde $0 \leq t_0 < \dfrac{c}{k}$ ... eliptičnost, ... spojitost

$\forall f \in V^*$ existuje řešení (VN):

$$\boxed{\begin{array}{l} u \in K \\ \forall v \in K: \ a_t(u, v-u) \geq f(v-u) \end{array}}$$

Pomocí tohoto lemmatu již důkaz věty snadno dokončíme; stačí lemma konečněkrát aplikovat:

Začneme s $\tau = 0$. Forma $a_0(u,v) = a_S(u,v)$ je navíc symetrická, a proto (viz větu na str. 5)

$$\boxed{\forall F \in V^* \; \exists u \in K \; \forall v \in K : \; a_0(u, v-u) \geq F(v-u)}$$

$$\Downarrow$$

$$\tau = \tau + t \qquad (t \leq t_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\dots$$

$$\Downarrow$$

$$\tau = 1$$

Dostaneme tak, že

$$\exists u \in K \; \forall v \in K : \; \underbrace{a_1(u, v-u)}_{= \, a(u, v-u)} \geq f(v-u)$$

## Důkaz lemmatu

**CBD**

Buď $t \in \langle \tau, \tau + t_0)$ a $f \in V^*$ dáno.

Definujme zobrazení $\boxed{T : V \to K}$ tak, že $u = Tw$ je (jediným) řešením (VN)

$$\boxed{\begin{aligned} & u \in K \\ & \forall v \in K : \; a_\tau(u, v-u) \geq F_w(v-u), \\ & \text{kde } F_w(v) := f(v) - (t - \tau)\, a_A(w, v) \end{aligned}}$$

(zřejmě $F_w \in V^*$)

Uvědomme si, že stačí dokázat, že $T$ má pevný bod, tzn. že existuje $\boxed{u \in K : Tu = u}$

(Pak dostáváš

$$\forall v \in K: \quad a_\tau(u, v-u) \geq \overbrace{f(v-u) - (t-\tau)\, a_A(u, v-u)}^{= F_u(v-u)}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall v \in K: \quad a_S(u, v-u) + \cancel{\tau\, a_A(u, v)} \geq f(v-u) - t\, a_A(u, v-u) + \cancel{\tau\, a_A(u, v-u)}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall v \in K: \quad \underbrace{a_S(u, v-u) + t\, a_A(u, v-u)}_{= a_t(u, v-u)} \geq f(v-u)$$

cbd.)

Protože $T: V \to K \subset V$ a $V$ je úplný, stačí dokázat, že $T$ je kontraktivní (viz Banachovu větu o pevném bodě)

$$\|\underset{\substack{\| \\ u_1}}{Tw_1} - \underset{\substack{\| \\ u_2}}{Tw_2}\| = \|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{C} \|F_{w_1} - F_{w_2}\|_{V^*} \leq$$

Viz větu na str. 7

$\leq$

$$|(F_{w_1} - F_{w_2})(v)| = \left| -(t-\tau)\left[a_A(w_1, v) - a_A(w_2, v)\right]\right| \leq$$

$$\leq t_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| \underline{a(w_1, v)} - a(v, w_1) - \underline{a(w_2, v)} + a(v, w_2)\right| =$$

$$= t_0 \cdot \frac{1}{2} \left| a(w_1 - w_2, v) - a(v, w_1 - w_2)\right| \leq$$

$$\leq t_0 \cdot \frac{1}{2} \left[k \|w_1 - w_2\| \cdot \|v\| + k \|w_1 - w_2\| \cdot \|v\|\right] =$$

$$= t_0 \cdot k \cdot \|w_1 - w_2\| \cdot \|v\|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|F_{w_1} - F_{w_2}\|_{V^*} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(F_{w_1} - F_{w_2})(v)| \leq t_0 \cdot k \cdot \|w_1 - w_2\|}$$

$$\leq \boxed{\underbrace{\frac{1}{c} \cdot t_0 \cdot k}_{<1} \cdot \|w_1 - w_2\|}$$

!! (viz volba $t_0$)

Tedy $T$ je kontraktivní

Cbd.