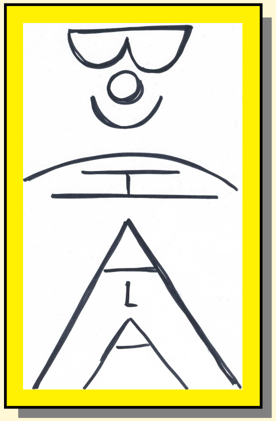
Cesta vede přes hranici
(o slabém hraničním řešení okrajových úloh)

Jiří Bouchala



Katedra aplikované matematiky, FEI VŠB-TU Ostrava

jiri.bouchala@vsb.cz

Obsah.

1. Úvod. Greenovy formule.
2. Potenciály a jejich vlastnosti.
3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
4. Přímé metody
   - Steklovův-Poincarého operátor,
   - slabé hraniční řešení (DN) úlohy,
   - slabé hraniční řešení Signoriniho úlohy,
   - slabé hraniční řešení kontaktního problému.

1. Úvod. Greenovy formule.

1. Úvod. Greenovy formule.
• Dirichletova úloha na kouli.
• Dirichletova úloha na vnějšku koule.
• Gaussova věta.
• Greenovy formule.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ v } \ \Omega, \\ \qquad + \\ \text{okrajové podmínky na } \ \partial\Omega \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ... omezená oblast s dost hladkou hranicí ($N \geq 2$).

1. Úvod. Greenovy formule.
- Dirichletova úloha na kouli.
- Dirichletova úloha na vnějšku koule.
- Gaussova věta.
- Greenovy formule.

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ v } \ \Omega, \\ \qquad\quad + \\ \text{okrajové podmínky na } \ \partial\Omega \end{cases}}$$

$$\left(u = g \text{ na } \partial\Omega,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = h \text{ na } \partial\Omega, \ldots\right);$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ... omezená oblast s dost hladkou hranicí ($N \geq 2$).

1. Úvod. Greenovy formule.
• Dirichletova úloha na kouli.
• Dirichletova úloha na vnějšku koule.
• Gaussova věta.
• Greenovy formule.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ v } \Omega, \\ \qquad + \\ \text{okrajové podmínky na } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\left(u = g \text{ na } \partial\Omega, \ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = h \text{ na } \partial\Omega, \dots \right);$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ... omezená oblast s dost hladkou hranicí ($N \geq 2$).

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ v } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ \qquad + \\ \text{okrajové podmínky na } \partial\Omega, \\ \qquad + \\ \quad \text{podmínky v } \infty \end{cases}$$

1. Úvod. Greenovy formule.
• Dirichletova úloha na kouli.
• Dirichletova úloha na vnějšku koule.
• Gaussova věta.
• Greenovy formule.

Vnitřní a vnější okrajová úloha.

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ v } \ \Omega, \\ \qquad + \\ \text{okrajové podmínky na } \ \partial\Omega \end{cases}}$$

$$\left(u = g \text{ na } \partial\Omega,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = h \text{ na } \partial\Omega, \dots\right);$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ... omezená oblast s dost hladkou hranicí ($N \geq 2$).

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ v } \ \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ \qquad + \\ \text{okrajové podmínky na } \ \partial\Omega, \\ \qquad + \\ \quad \text{podmínky v } \ \infty \end{cases}}$$

$$\left(u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty\right).$$

1. Úvod. Greenovy formule.
• Dirichletova úloha na kouli.
• Dirichletova úloha na vnějšku koule.
• Gaussova věta.
• Greenovy formule.

Řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli.

$$\text{(DK)} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ B_R(x_0), \\ u = \varphi \ \text{ na } \ \partial B_R(x_0), \end{cases}$$

kde

- $R > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^N,\ \ B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N :\ \|x - x_0\| < R\},$
- $\varphi \in C\big(\partial B_R(x_0)\big).$

Věta. Buď

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x),\ x \in \partial B_R(x_0), \\ \frac{1}{\kappa_N \cdot R} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \varphi(y)\, \frac{R^2 - \|x-x_0\|^2}{\|x-y\|^N}\, \mathrm{d}S_y,\ x \in B_R(x_0), \end{cases}$$

kde κ_N je povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^N$.

Pak $u \in C^\infty\big(B_R(x_0)\big) \cap C\big(\overline{B_R(x_0)}\big)$ je jediným (klasickým) řešením úlohy (DK) a platí $\|u\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty$.

1. Úvod. Greenovy formule.
- Dirichletova úloha na kouli.
- Dirichletova úloha na vnějšku koule.
- Gaussova věta.
- Greenovy formule.

Řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli.

$$\text{(DK)}\quad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } B_R(x_0), \\ u = \varphi \text{ na } \partial B_R(x_0), \end{cases}$$

kde

- $R > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^N,\ \ B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N :\ \|x - x_0\| < R\},$
- $\varphi \in C\big(\partial B_R(x_0)\big).$

Věta. Buď

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x),\ x \in \partial B_R(x_0), \\ \frac{1}{\kappa_N \cdot R} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \varphi(y)\, \frac{R^2 - \|x-x_0\|^2}{\|x-y\|^N}\, \mathrm{d}S_y,\ x \in B_R(x_0), \end{cases}$$

kde κ_N je povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^N$.

Pak $u \in C^\infty\big(B_R(x_0)\big) \cap C\big(\overline{B_R(x_0)}\big)$ je jediným (klasickým) řešením úlohy (DK) a platí $\|u\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty$.

$\kappa_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$, přičemž pro $k \in \mathbb{N}$ je

$\Gamma(k) = (k-1)!,\ \Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi},$

$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1.$

$\kappa_1 = 2,\ \kappa_2 = 2\pi,$

$\kappa_3 = 4\pi,\ \kappa_4 = 2\pi^2,$

$\kappa_5 = \frac{8}{3}\pi^2,\ \kappa_6 = \pi^3,$

$\kappa_7 = \frac{16}{15}\pi^3,\ \kappa_8 = \frac{1}{3}\pi^4,$

...

1. Úvod. Greenovy formule.
• Dirichletova úloha na kouli.
• Dirichletova úloha na vnějšku koule.
• Gaussova věta

Řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rov. na vnějšku koule.

$$\text{(DVK)} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(x_0)}, \\ u = \varphi \ \text{ na } \ \partial B_R(x_0), \ \varphi \in C\big(\partial B_R(x_0)\big), \\ u = \mathcal{O}\Big(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\Big) \ \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}$$

Věta. Buď

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x), \ x \in \partial B_R(x_0), \\ \frac{1}{\kappa_N \cdot R} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} \varphi(y) \, \frac{\|x-x_0\|^2 - R^2}{\|x-y\|^N} \, \mathrm{d}S_y, \ \|x - x_0\| > R. \end{cases}$$

Pak $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(x_0)}\big) \cap C\big(\mathbb{R}^N \setminus B_R(x_0)\big)$ je jediným (klasickým) řešením úlohy (DVK).

1. Úvod. Greenovy formule.
• Dirichletova úloha na kouli.
• Dirichletova úloha na vnějšku koule.
• Gaussova věta.
• Greenovy formule.

Věta (Gauss). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s dost hladkou hranicí. Pak

$$\forall u \in C^1(\overline{\Omega}) \ \ \forall i \in \{1, ..., N\} : \quad \boxed{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\, n_i \,\mathrm{d}s}$$

$(n = (n_1, n_2, ..., n_N)$ ... jednotkový vektor vnější normály$)$.

1. Úvod. Greenovy formule.
• Dirichletova úloha na kouli.
• Dirichletova úloha na vnějšku koule.
• Gaussova věta.
• Greenovy formule.

Věta (Gauss). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s dost hladkou hranicí. Pak

$$\forall u \in C^1(\overline{\Omega}) \ \ \forall i \in \{1, ..., N\} : \quad \boxed{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\, n_i\,\mathrm{d}s}$$

$(n = (n_1, n_2, ..., n_N)$ ... jednotkový vektor vnější normály$)$.

$\boxed{N = 1}$

$$\forall u \in C^1(\langle a, b\rangle) : \quad \boxed{\int_a^b u'\,\mathrm{d}x = [u]_a^b = u(b) - u(a),}$$

1. Úvod. Greenovy formule.
• Dirichletova úloha na kouli.
• Dirichletova úloha na vnějšku koule.
• Gaussova věta.
• Greenovy formule.

Věta (Gauss). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s dost hladkou hranicí. Pak

$$\forall u \in C^1(\overline{\Omega}) \ \ \forall i \in \{1, ..., N\} : \quad \boxed{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u \, n_i \, \mathrm{d}s}$$

$(n = (n_1, n_2, ..., n_N)$ ... jednotkový vektor vnější normály).

$\boxed{N = 1}$

$$\forall u \in C^1(\langle a, b \rangle) : \quad \boxed{\int_a^b u' \, \mathrm{d}x = [u]_a^b = u(b) - u(a),}$$

$$\forall u, v \in C^1(\langle a, b \rangle) : \quad \int_a^b (uv)' \, \mathrm{d}x = [uv]_a^b,$$

1. Úvod. Greenovy formule.
- Dirichletova úloha na kouli.
- Dirichletova úloha na vnějšku koule.
- Gaussova věta.
- Greenovy formule.

Věta (Gauss). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, kde $N \geq 1$, je omezená oblast s dost hladkou hranicí. Pak

$$\forall u \in C^1(\overline{\Omega}) \ \ \forall i \in \{1, ..., N\} : \ \boxed{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u \, n_i \, \mathrm{d}s}$$

$(n = (n_1, n_2, ..., n_N)$ ... jednotkový vektor vnější normály).

$\boxed{N = 1}$

$$\forall u \in C^1(\langle a, b \rangle) : \ \boxed{\int_a^b u' \, \mathrm{d}x = [u]_a^b = u(b) - u(a),}$$

$$\forall u, v \in C^1(\langle a, b \rangle) : \ \int_a^b (uv)' \, \mathrm{d}x = [uv]_a^b,$$ a proto

$$\boxed{\int_a^b u'v \, \mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b uv' \, \mathrm{d}x.}$$

1. Úvod. Greenovy formule.
• Dirichletova úloha na kouli.
• Dirichletova úloha na vnějšku koule.
• Gaussova věta.
• Greenovy formule.

$$\boxed{\forall u, v \in C^1(\overline{\Omega}) : \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uvn_i\,\mathrm{d}s}$$

1. Úvod. Greenovy formule.
- Dirichletova úloha na kouli.
- Dirichletova úloha na vnějšku koule.
- Gaussova věta.
- Greenovy formule.

$$\boxed{\forall u, v \in C^1(\overline{\Omega}) : \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uvn_i \,\mathrm{d}s}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u, v \in C^2(\overline{\Omega}) : \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} vn_i \,\mathrm{d}s$$

1. Úvod. Greenovy formule.
- Dirichletova úloha na kouli.
- Dirichletova úloha na vnějšku koule.
- Gaussova věta.
- Greenovy formule.

$$\forall u,v \in C^1(\overline{\Omega}): \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uvn_i\,\mathrm{d}s$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u,v \in C^2(\overline{\Omega}): \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} vn_i\,\mathrm{d}s$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u,v \in C^2(\overline{\Omega}): \int_\Omega \Delta u\cdot v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} v\,\mathrm{d}s$$

... 1. Greenova formule

1. Úvod. Greenovy formule.
- Dirichletova úloha na kouli.
- Dirichletova úloha na vnějšku koule.
- Gaussova věta.
- Greenovy formule.

$$\boxed{\forall u, v \in C^1(\overline{\Omega}) : \ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uvn_i \,\mathrm{d}s}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u, v \in C^2(\overline{\Omega}) : \ \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} vn_i \,\mathrm{d}s$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u, v \in C^2(\overline{\Omega}) : \ \int_\Omega \Delta u \cdot v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\, v \,\mathrm{d}s$$

... 1. Greenova formule

$$\Downarrow$$

$$\forall u, v \in C^2(\overline{\Omega}) : \ \int_\Omega (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\, v - u\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}s$$

... 2. Greenova formule

1. Úvod. Greenovy formule.
- Dirichletova úloha na kouli.
- Dirichletova úloha na vnějšku koule.
- Gaussova věta.
- Greenovy formule.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.

Definice. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ omezená oblast. Řekneme, že funkce $u \in C^2(\Omega)$ je harmonická v Ω, platí-li: $\Delta u = 0$ v Ω.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Definice. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ omezená oblast. Řekneme, že funkce $u \in C^2(\Omega)$ je harmonická v Ω, platí-li: $\Delta u = 0$ v Ω.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ neomezená oblast. Řekneme, že funkce $u \in C^2(\Omega)$ je harmonická v Ω, platí-li:
$\Delta u = 0$ v Ω a současně $u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right)$ pro $\|x\| \to \infty$.

$$\Updownarrow$$

$$(\exists K > 0)\,(\exists R > 0)\,\big(\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \|x\| > R\big):\ |u(x)| \leq \frac{K}{\|x\|^{N-2}}.$$

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Definice. Buď $N \geq 3$. Funkci

$$v(x,y) := \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}$$

nazýváme <u>elementárním řešením Laplaceovy rovnice</u> (tj. rovnice $\Delta u = 0$).

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Definice. Buď $N \geq 3$. Funkci

$$v(x,y) := \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}$$

nazýváme elementárním řešením Laplaceovy rovnice (tj. rovnice $\Delta u = 0$).

Věta. Pro každé $y \in \mathbb{R}^N$ je funkce

$$x \mapsto v(x,y)$$

harmonická v každé oblasti, která neobsahuje bod y.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Definice. Buď $N \geq 3$. Funkci

$$v(x,y) := \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}$$

nazýváme elementárním řešením Laplaceovy rovnice (tj. rovnice $\Delta u = 0$).

Věta. Pro každé $y \in \mathbb{R}^N$ je funkce

$$x \mapsto v(x,y)$$

harmonická v každé oblasti, která neobsahuje bod y.

Věta. Pro každé $y \in \mathbb{R}^N$ platí

$$\Delta_x v(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x,y) = -\delta_y \equiv \delta(x-y)$$

(derivace je třeba chápat ve smyslu distribucí).

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (o třech potenciálech).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ omezená oblast s dost hladkou hranicí, $v: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ elementární řešení Laplaceovy rovnice a $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak pro každé $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = -\int_\Omega \Delta u(y) v(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} v(x,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (o třech potenciálech).

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ omezená oblast s dost hladkou hranicí, $v:\ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ elementární řešení Laplaceovy rovnice a $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak pro každé $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = -\int_\Omega \Delta u(y) v(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} v(x,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

Speciálně: je-li navíc $\Delta u = 0$ v Ω, je

$$\forall x \in \Omega:\ u(x) = \int_{\partial\Omega} v(x,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (o třech potenciálech).

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) omezená oblast s dost hladkou hranicí, $v: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ elementární řešení Laplaceovy rovnice a $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak pro každé $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = -\int_\Omega \Delta u(y) v(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} v(x,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

Speciálně: je-li navíc $\Delta u = 0$ v Ω, je

$$\forall x \in \Omega:\ u(x) = \int_{\partial\Omega} v(x,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

Důsledek (věta o regularitě).

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) libovolná oblast, $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ v Ω. Pak $u \in C^\infty(\Omega)$.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

$$u(x) = -\int_\Omega \Delta u(y) v(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} v(x,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_y}(x,y)u(y)\mathrm{d}s_y.$$

V dalším uvažujme pouze případ $N \geq 3$.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

V dalším uvažujme pouze případ $N \geq 3$.

Definice.

- $$\boxed{v(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}s_y}$$

... potenciál jednoduché vrstvy,

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

V dalším uvažujme pouze případ $N \geq 3$.

Definice.

- $$v(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}s_y$$

  ... potenciál jednoduché vrstvy,

- $$w(x) := \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y$$

  ... potenciál dvojvrstvy,

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

V dalším uvažujme pouze případ $N \geq 3$.

Definice.

- $$v(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}s_y$$

  ... potenciál jednoduché vrstvy,

- $$w(x) := \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y$$

  ... potenciál dvojvrstvy,

- $$\varphi(x) := \int_{\Omega} \varrho(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}y$$

  ... objemový (Newtonův) potenciál;

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

V dalším uvažujme pouze případ $N \geq 3$.

Definice.

- $v(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}s_y$

  ... potenciál jednoduché vrstvy,

- $w(x) := \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y$

  ... potenciál dvojvrstvy,

- $\varphi(x) := \int_\Omega \varrho(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}y$

  ... objemový (Newtonův) potenciál;

μ, σ, ϱ ... hustoty (příslušných potenciálů).

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti objemového potenciálu).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak potenciál φ je

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti objemového potenciálu).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak potenciál φ je

- spojitý a spojitě diferencovatelný v $\mathbb{R}^N$,

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti objemového potenciálu).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak potenciál φ je

- spojitý a spojitě diferencovatelný v $\mathbb{R}^N$,
- harmonická funkce v každé oblasti $G \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti objemového potenciálu).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak potenciál φ je

- spojitý a spojitě diferencovatelný v $\mathbb{R}^N$,
- harmonická funkce v každé oblasti $G \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, je

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti objemového potenciálu). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak potenciál φ je

- spojitý a spojitě diferencovatelný v $\mathbb{R}^N$,
- harmonická funkce v každé oblasti $G \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, je

- $\varphi \in C^2(\Omega)$,

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti objemového potenciálu).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak potenciál φ je

- spojitý a spojitě diferencovatelný v $\mathbb{R}^N$,
- harmonická funkce v každé oblasti $G \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, je

- $\varphi \in C^2(\Omega)$,
- $\forall x \in \Omega : \ -\Delta\varphi(x) = (N-2)\kappa_N \varrho(x)$.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti objemového potenciálu). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\varrho \in L^\infty(\Omega)$. Pak potenciál φ je

- spojitý a spojitě diferencovatelný v $\mathbb{R}^N$,
- harmonická funkce v každé oblasti $G \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\varrho \in C^1(\overline{\Omega})$, je

- $\varphi \in C^2(\Omega)$,
- $\forall x \in \Omega : \ -\Delta\varphi(x) = (N-2)\kappa_N \varrho(x)$.

Uvedený výsledek nám umožňuje konstruovat partikulární řešení Poissonovy rovnice a převést tak okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici na okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici:

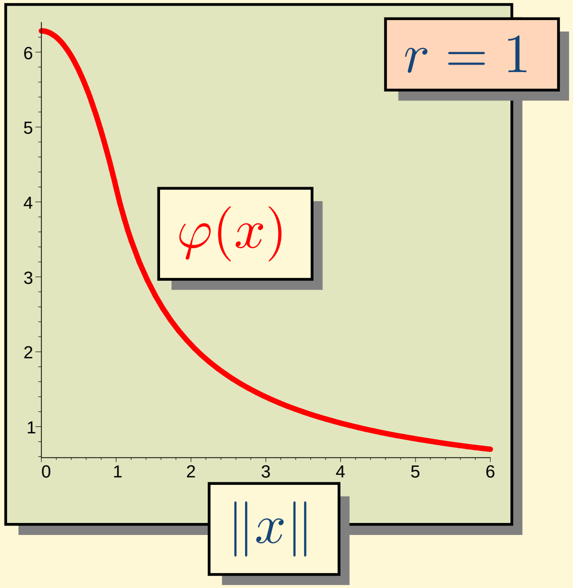
$$\left.\begin{array}{r} -\Delta u_0 = f \quad \in C^1(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ -\Delta(u+u_0) = f;$$

$$u_0(x) = \frac{1}{(N-2)\kappa_N} \int_\Omega f(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \,\mathrm{d}y.$$

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Příklad. Objemovým potenciálem koule $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho := 1$ je funkce

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3}(3r^2 - \|x\|^2), & \text{je-li } \|x\| \le r, \\ \frac{4\pi}{3}\frac{r^3}{\|x\|}, & \text{je-li } \|x\| > r. \end{cases}$$



Odtud plyne, že jedním z řešení rovnice $\Delta u = 1$ na $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ je funkce

$$u(x) := -\frac{1}{4\pi}\frac{2\pi}{3}(3r^2 - \|x\|^2) = \frac{1}{6}\|x\|^2 + konst.,$$

takže taky (např.) funkce $\tilde{u}(x) := \frac{1}{6}\|x\|^2$.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\mu \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál v je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\mu \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál v je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\mu \in C(\partial\Omega)$, je potenciál v spojitý v $\mathbb{R}^N$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\mu \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál v je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\mu \in C(\partial\Omega)$, je potenciál v spojitý v $\mathbb{R}^N$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

- $\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_i := \lim_{\alpha \to 0-} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x + \alpha n_x) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\mu(x) + \overline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}}(x)$,

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\mu \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál v je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\mu \in C(\partial\Omega)$, je potenciál v spojitý v $\mathbb{R}^N$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

- $\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_i := \lim\limits_{\alpha\to 0-} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x+\alpha n_x) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\mu(x) + \overline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}}(x)$,

  kde $\overline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}}(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y$;

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\mu \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál v je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\mu \in C(\partial\Omega)$, je potenciál v spojitý v $\mathbb{R}^N$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

- $\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_i := \lim\limits_{\alpha\to 0-} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x + \alpha n_x) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\mu(x) + \overline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}}(x)$,

  kde $\overline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}}(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y$;
- $\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_e := \lim\limits_{\alpha\to 0+} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x + \alpha n_x) = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2}\mu(x) + \overline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}}(x)$.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\mu \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál v je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\mu \in C(\partial\Omega)$, je potenciál v spojitý v $\mathbb{R}^N$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

- $\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_i := \lim\limits_{\alpha\to 0-} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x+\alpha n_x) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\mu(x) + \overline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}}(x)$,

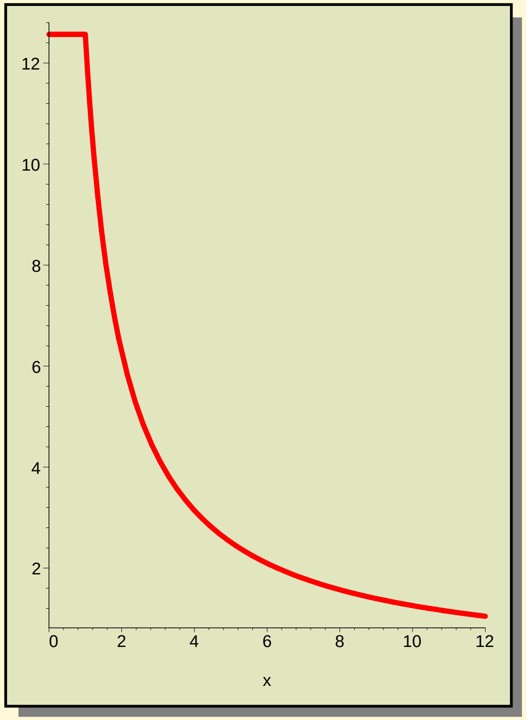
  kde $\overline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}}(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y$;
- $\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_e := \lim\limits_{\alpha\to 0+} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x+\alpha n_x) = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2}\mu(x) + \overline{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}}(x)$.

$$\left(\text{Takže } \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_i - \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n_x}(x)\right]_e = (N-2)\kappa_N \mu(x).\right)$$

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Příklad.
Potenciálem jednoduché vrstvy na sféře $\partial B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ s hustotou $\mu := 1$ je funkce

$$v(x) = \begin{cases} 4\pi r, & \text{je-li } \|x\| \le r, \\ 4\pi \frac{r^2}{\|x\|}, & \text{je-li } \|x\| > r. \end{cases}$$



2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu dvojvrstvy).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\sigma \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál w je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu dvojvrstvy).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\sigma \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál w je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\sigma \in C(\partial\Omega)$, je $w|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu dvojvrstvy).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\sigma \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál w je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\sigma \in C(\partial\Omega)$, je $w|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

- $w_e(x) := \lim\limits_{\substack{\tilde{x} \to x \\ \tilde{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}}} w(\tilde{x}) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\sigma(x) + w(x)$,

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu dvojvrstvy).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\sigma \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál w je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\sigma \in C(\partial\Omega)$, je $w|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

- $w_e(x) := \lim\limits_{\substack{\tilde{x} \to x \\ \tilde{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}}} w(\tilde{x}) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2} \sigma(x) + w(x)$,
- $w_i(x) := \lim\limits_{\substack{\tilde{x} \to x \\ \tilde{x} \in \Omega}} w(\tilde{x}) = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2} \sigma(x) + w(x)$.

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Věta (vlastnosti potenciálu dvojvrstvy). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a buď $\sigma \in L^1(\partial\Omega)$. Pak potenciál w je harmonickou funkcí v oblastech Ω a $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Je-li $\sigma \in C(\partial\Omega)$, je $w|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega)$ a pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

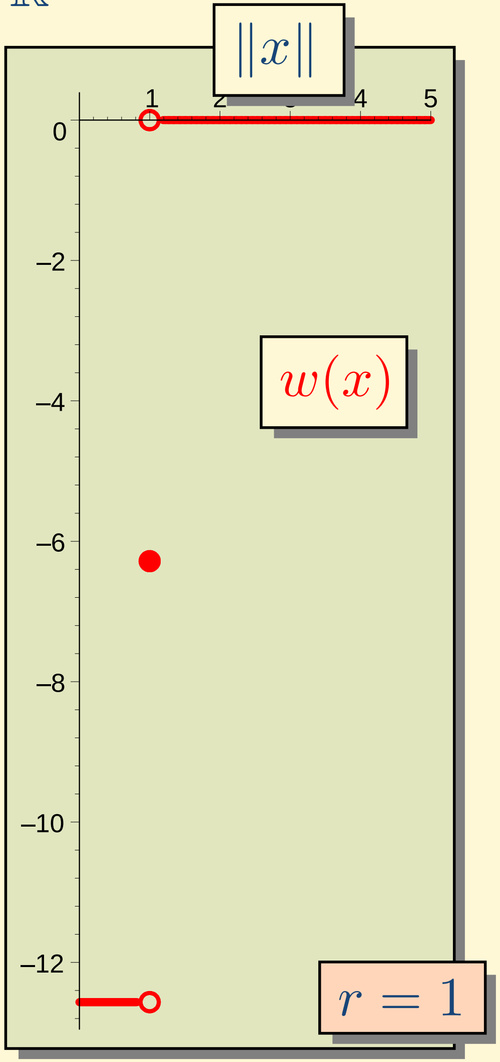
- $w_e(x) := \lim\limits_{\substack{\tilde{x} \to x \\ \tilde{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}}} w(\tilde{x}) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2} \sigma(x) + w(x)$,
- $w_i(x) := \lim\limits_{\substack{\tilde{x} \to x \\ \tilde{x} \in \Omega}} w(\tilde{x}) = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2} \sigma(x) + w(x)$.

(Takže $w_e(x) - w_i(x) = (N-2)\kappa_N \sigma(x)$.)

2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

Příklad.
Potenciálem dvojvrstvy na sféře $\partial B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ s hustotou $\sigma := 1$ je funkce

$$w(x) = \begin{cases} -4\pi, & \text{je-li } \|x\| < r, \\ -2\pi, & \text{je-li } \|x\| = r, \\ 0, & \text{je-li } \|x\| > r. \end{cases}$$



2. Potenciály a jejich vlastnosti.
Harmonické funkce.
• Elementární řešení Laplac. rovnice.
• Věta o třech potenciálech.
• Definice potenciálů.
• Vlastnosti:
- objem. pot.,
- p. jedn. vrst.,
- p. dvojvrstvy.

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{D_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ \Omega, \\ u = g \ \text{ na } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$\boxed{(\mathrm{D_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \Omega, \\ u = g \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}}$$

Hledejme (klasické) řešení $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ problému $(\mathrm{D_i})$ ve tvaru potenciálu dvojvrstvy s `neznámou` hustotou $\sigma \in C(\partial\Omega)$,

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{D_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ \Omega, \\ u = g \ \text{ na } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Hledejme (klasické) řešení $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ problému $(\mathrm{D_i})$ ve tvaru potenciálu dvojvrstvy s `neznámou` hustotou $\sigma \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y, \ x \in \Omega, \\ g(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{D_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \Omega, \\ u = g \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hledejme (klasické) řešení $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ problému $(\mathrm{D_i})$ ve tvaru potenciálu dvojvrstvy s `neznámou` hustotou $\sigma \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y, \ x \in \Omega, \\ g(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Protože potenciál dvojvrstvy je na Ω harmonickou funkcí (tj. splňuje Laplaceovu rovnici automaticky), jde pouze o to určit hustotu σ tak, aby platilo, že $u \in C(\overline{\Omega})$,

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Vnitřní Dirichletova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$\boxed{(\mathrm{D_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ \Omega, \\ u = g \ \text{ na } \ \partial\Omega. \end{cases}}$$

Hledejme (klasické) řešení $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ problému $(\mathrm{D_i})$ ve tvaru potenciálu dvojvrstvy s `neznámou` hustotou $\sigma \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y, \ x \in \Omega, \\ g(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Protože potenciál dvojvrstvy je na Ω harmonickou funkcí (tj. splňuje Laplaceovu rovnici automaticky), jde pouze o to určit hustotu σ tak, aby platilo, že $u \in C(\overline{\Omega})$, tzn. aby pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = u_i(x) = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2} \sigma(x) + \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y,$$

tj. aby

$(\heartsuit)$ $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\sigma(x) - \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y = -\frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

tj. aby

$(\heartsuit)$ $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\sigma(x) - \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = -\frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

$\Big($ $(\heartsuit)$ ... Fredholmova integrální rovnice druhého druhu. $\Big)$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

tj. aby

$(\heartsuit)$ $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\sigma(x) - \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y = - \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

$\Big($ $(\heartsuit)$ ... Fredholmova integrální rovnice druhého druhu. $\Big)$

Věta. Pro každou funkci $g \in C(\partial\Omega)$ existuje právě jedno (klasické) řešení úlohy $(\mathrm{D_i})$. Tímto řešením je funkce

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y, \; x \in \Omega, \\ g(x), \; x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

kde σ je řešením rovnice $(\heartsuit)$.

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).

- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$
(\mathrm{N_e}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_e = g \ \text{ na } \ \partial\Omega, \\ u = \mathcal{O}\Big(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\Big) \ \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}
$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{N_e}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_e = g \text{ na } \partial\Omega, \\ u = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}$$

Hledejme (klasické) řešení $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ problému $(\mathrm{N_e})$ ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy s `neznámou` hustotou $\mu \in C(\partial\Omega)$,

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{N_e}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_e = g \text{ na } \partial\Omega, \\ u = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}$$

Hledejme (klasické) řešení $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ problému $(\mathrm{N_e})$ ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy s `neznámou` hustotou $\mu \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}s_y.$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{N_e}) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_e = g \text{ na } \partial\Omega, \\ u = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}$$

Hledejme (klasické) řešení $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ problému $(\mathrm{N_e})$ ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy s `neznámou` hustotou $\mu \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}s_y.$$

Protože potenciál jednoduché vrstvy je na $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ harmonickou funkcí, jde pouze o to určit hustotu μ tak, aby pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x)\right]_e = -\frac{(N-2)\kappa_N}{2}\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y,$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

tj. aby

$(\Diamond)$ $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\mu(x) - \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = -\frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

tj. aby

$(\Diamond)$ $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\mu(x) - \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = -\frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

$\Big($ $(\Diamond)$ ... adjungovaná rovnice k $(\heartsuit)$. $\Big)$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

tj. aby

$(\diamondsuit)$ $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\mu(x) - \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = -\frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

($(\diamondsuit)$ ... adjungovaná rovnice k $(\heartsuit)$.)

Věta. Pro každou funkci $g \in C(\partial\Omega)$ existuje právě jedno (klasické) řešení úlohy $(\mathrm{N_e})$. Tímto řešením je funkce

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\, \mathrm{d}s_y,$$

kde μ je řešením rovnice $(\diamondsuit)$.

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{D_e}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ u = g \ \text{ na } \ \partial\Omega, \\ u = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \ \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{D_e}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ u = g \text{ na } \partial\Omega, \\ u = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty. \end{cases}$$

Podobně jako u $(\mathrm{D_i})$: funkce

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y, \; x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ g(x), \; x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

je (klasickým) řešením úlohy $(\mathrm{D_e})$, je-li hustota $\sigma \in C(\partial\Omega)$ taková, že pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = u_e(x) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2} \sigma(x) + \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y,$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

tj. že

(♠) $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\sigma(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

tj. že

$$(\spadesuit) \quad \boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$$

$$\boxed{\sigma(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

Tentokrát je situace složitější, může se totiž stát, že rovnice $(\spadesuit)$ nemá řešení. I v takovémto případě má sice úloha $(\mathrm{D_e})$ řešení, toto však nemá tvar potenciálu dvojvrstvy.

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

tj. že

$$(\spadesuit) \quad \boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$$

$$\boxed{\sigma(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

Tentokrát je situace složitější, může se totiž stát, že rovnice $(\spadesuit)$ nemá řešení. I v takovémto případě má sice úloha $(\mathrm{D_e})$ řešení, toto však nemá tvar potenciálu dvojvrstvy.

K této situaci dochází proto, že potenciály dvojvrstvy tvoří příliš "malou" část množiny všech harmonických funkcí v $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

tj. že

$$(\spadesuit) \quad \boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$$

$$\boxed{\sigma(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

Tentokrát je situace složitější, může se totiž stát, že rovnice $(\spadesuit)$ nemá řešení. I v takovémto případě má sice úloha (D$_\mathrm{e}$) řešení, toto však nemá tvar potenciálu dvojvrstvy.

K této situaci dochází proto, že potenciály dvojvrstvy tvoří příliš "malou" část množiny všech harmonických funkcí v $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

U obecné harmonické funkce totiž požadujeme, aby byla

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty,$$

zatímco potenciál dvojvrstvy je

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-1}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty.$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Pokusme se řešení najít ve tvaru součtu potenciálu dvojvrstvy a jednoduché harmonické funkce s růstem

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty.$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Pokusme se řešení najít ve tvaru součtu potenciálu dvojvrstvy a jednoduché harmonické funkce s růstem

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty.$$

Umístěme počátek soustavy souřadnic dovnitř Ω a hledejme u ve tvaru:

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y + \frac{1}{\|x\|^{N-2}} \int_{\partial\Omega} \sigma(y)\, \mathrm{d}s_y, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ g(x),\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Pokusme se řešení najít ve tvaru součtu potenciálu dvojvrstvy a jednoduché harmonické funkce s růstem

$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right)$ pro $\|x\| \to \infty$.

Umístěme počátek soustavy souřadnic dovnitř Ω a hledejme u ve tvaru:

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y + \frac{1}{\|x\|^{N-2}} \int_{\partial\Omega} \sigma(y)\, \mathrm{d}s_y, \\ \qquad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ g(x),\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Už víme, že $\forall \sigma \in C(\partial\Omega)$ je takto definovaná funkce u harmonická v $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Pokusme se řešení najít ve tvaru součtu potenciálu dvojvrstvy a jednoduché harmonické funkce s růstem

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right) \text{ pro } \|x\| \to \infty.$$

Umístěme počátek soustavy souřadnic dovnitř Ω a hledejme u ve tvaru:

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y + \frac{1}{\|x\|^{N-2}} \int_{\partial\Omega} \sigma(y)\,\mathrm{d}s_y, \\ \qquad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ g(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Už víme, že $\forall \sigma \in C(\partial\Omega)$ je takto definovaná funkce u harmonická v $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Zbývá tedy určit $\sigma \in C(\partial\Omega)$ tak, aby pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = u_e(x) = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\sigma(x) + \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) + \frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right] \mathrm{d}s_y,$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

tj. aby

(♠♠) $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\sigma(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \right) + \frac{1}{\|x\|^{N-2}} \right] \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

tj. aby

(♠♠) $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\sigma(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) + \frac{1}{\|x\|^{N-2}}\right] \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

Věta. Pro každou funkci $g \in C(\partial\Omega)$ existuje právě jedno (klasické) řešení úlohy $(\mathrm{D_e})$. Tímto řešením je funkce

$$u(x) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y + \frac{1}{\|x\|^{N-2}} \int_{\partial\Omega} \sigma(y)\, \mathrm{d}s_y, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \\ g(x),\ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

kde $\sigma \in C(\partial\Omega)$ je řešením rovnice (♠♠).

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{N_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \Omega, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_i = g \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{N_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ v } \ \Omega, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_i = g \ \text{ na } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Pozorování 1.
Je-li funkce u klasickým řešením úlohy $(\mathrm{N_i})$, je i každá z funkcí

$$v_c(x) := u(x) + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$, řešením $(\mathrm{N_i})$.

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) omezená oblast s dost hladkou hranicí a $g \in C(\partial\Omega)$. Uvažujme problém

$$(\mathrm{N_i}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ v } \Omega, \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right]_i = g \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pozorování 1.
Je-li funkce u klasickým řešením úlohy $(\mathrm{N_i})$, je i každá z funkcí

$$v_c(x) := u(x) + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$, řešením $(\mathrm{N_i})$.

Pozorování 2.
Buď u dost hladké řešení úlohy $(\mathrm{N_i})$ a $v := 1$.
Z 1. Greenovy formule $\int_\Omega \Delta u \cdot v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} v \,\mathrm{d}s$ pak vyplývá, že

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}s.$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Řešení u hledejme ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy s hustotou $\mu \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}s_y.$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Řešení u hledejme ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy s hustotou $\mu \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \,\mathrm{d}s_y.$$

Pro μ pak musí platit, že pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x)\right]_i = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\,\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y,$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Řešení u hledejme ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy s hustotou $\mu \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\, \mathrm{d}s_y.$$

Pro μ pak musí platit, že pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x)\right]_i = \frac{(N-2)\kappa_N}{2}\,\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y,$$

tj. že

(♣) $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\mu(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N}\, g(x).}$$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
• Vnitřní Dirichletova úloha.
• Vnější Neumannova úloha.
• Vnější Dirichletova úloha.
• Vnitřní Neumannova úloha.

Řešení u hledejme ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy s hustotou $\mu \in C(\partial\Omega)$, tj.

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{1}{\|x-y\|^{N-2}} \, \mathrm{d}s_y.$$

Pro μ pak musí platit, že pro každé $x \in \partial\Omega$:

$$g(x) = \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x)\right]_i = \frac{(N-2)\kappa_N}{2} \mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y,$$

tj. že

(♣) $\boxed{\forall x \in \partial\Omega :}$

$$\boxed{\mu(x) + \frac{2}{(N-2)\kappa_N} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\right) \mathrm{d}s_y = \frac{2}{(N-2)\kappa_N} g(x).}$$

$\Big($ (♣) ... adjungovaná rovnice k (♠). $\Big)$

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).
- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

Věta. Podmínka

$$\int_{\partial\Omega} g(x)\,\mathrm{d}s_x = 0$$

je podmínkou `nutnou` a `postačující`, aby úloha $(\mathrm{N_i})$ (s okrajovou podmínkou $g \in C(\partial\Omega)$) měla řešení. Toto řešení je jednoznačně až na konstantu určeno vztahem

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \mu(y)\,\frac{1}{\|x-y\|^{N-2}}\,\mathrm{d}s_y,$$

kde μ je řešením rovnice $(\clubsuit)$.

3. Metoda potenciálů (nepřímé metody).

- Vnitřní Dirichletova úloha.
- Vnější Neumannova úloha.
- Vnější Dirichletova úloha.
- Vnitřní Neumannova úloha.

4. Přímé metody.

4. Přímé metody.
• Dirichletova-Neumannova úloha.
• Steklov - Poincaré operátor.
• Slabé řešení (DN) úlohy.
• Signoriniho úloha.
• Kontaktní problém.
Literatura.

Uvažujme problém

$$(\mathrm{DN})\qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = g_1 & \text{na } \Gamma_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = g_2 & \text{na } \Gamma_2, \end{cases}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $g_1 \in C(\Gamma_1)$, $g_2 \in C(\Gamma_2)$, $f \in C(\overline{\Omega})$.

4. Přímé metody.
• Dirichletova-Neumannova úloha.
• Steklov - Poincaré operátor.
• Slabé řešení (DN) úlohy.
• Signoriniho úloha.
• Kontaktní problém.
Literatura.

Uvažujme problém

$$(\mathrm{DN})\quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = g_1 & \text{na } \Gamma_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = g_2 & \text{na } \Gamma_2, \end{cases}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $g_1 \in C(\Gamma_1)$, $g_2 \in C(\Gamma_2)$, $f \in C(\overline{\Omega})$.

Věta (o třech potenciálech).
Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast s dost hladkou hranicí a $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak pro každé $x \in \Omega$ platí

$$u(x) = -\int_\Omega \frac{1}{4\pi}\Delta u(y)\frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y + \\ + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) - \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\Big(\frac{1}{\|x-y\|}\Big)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

Zjistili jsme: je-li $u \in C^2(\overline{\Omega})$ řešením úlohy (DN), je

pro každé $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y + \\ + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\Big(\frac{1}{\|x-y\|}\Big) u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

Zjistili jsme: je-li $u \in C^2(\overline{\Omega})$ řešením úlohy (DN), je

pro každé $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega}\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\Big(\frac{1}{\|x-y\|}\Big)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

Problém: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) = ?$ na Γ_1, $u(y) = ?$ na Γ_2.

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

$\forall \tilde{x} \in \Omega :$

$$u(\tilde{x}) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\right)\mathrm{d}s_y.$$

$\forall \tilde{x} \in \Omega :$

$$u(\tilde{x}) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\right)\mathrm{d}s_y.$$

Limitním přechodem ($\Omega \ni \tilde{x} \to x \in \partial\Omega$) dostaneme, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

$$u(x) =$$
$$= \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}s_y + \frac{1}{2}u(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)\mathrm{d}s_y,$$

$\forall \tilde{x} \in \Omega$:

$$u(\tilde{x}) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\right)\mathrm{d}s_y.$$

Limitním přechodem ($\Omega \ni \tilde{x} \to x \in \partial\Omega$) dostaneme, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

$$u(x) =$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}s_y + \frac{1}{2}u(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)\mathrm{d}s_y,$$

tj.

$\forall x \in \partial\Omega$:

$$\frac{1}{2}u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y)\,\mathrm{d}s_y + \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y.$$

$\forall \tilde{x} \in \Omega :$

$$u(\tilde{x}) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\right)\mathrm{d}s_y.$$

Limitním přechodem ($\Omega \ni \tilde{x} \to x \in \partial\Omega$) dostaneme, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= \\ &= \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}s_y + \frac{1}{2}u(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)\mathrm{d}s_y, \end{aligned}}$$

tj.

$\forall x \in \partial\Omega :$

$$\frac{1}{2}u(x) = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y}_{=:\, V\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)(x)} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y)\,\mathrm{d}s_y}_{=:\, K(u)(x)} + \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y}_{=:\, N_0(f)(x)}.$$

$\forall \tilde{x} \in \Omega$:

$$u(\tilde{x}) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\right)\mathrm{d}s_y.$$

$\forall \tilde{x} \in \Omega :$

$$u(\tilde{x}) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\right) \mathrm{d}s_y.$$

Nyní proveďme limitní přechod pro "derivaci podle vnější normály". Z předpokladu $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a z vlastností potenciálů pak plyne, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x) = \\ = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y)\,\mathrm{d}s_y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x} \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y.$$

$\forall \tilde{x} \in \Omega:$

$$u(\tilde{x}) = \int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y) \frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\,\mathrm{d}s_y - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} u(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|\tilde{x}-y\|}\right)\mathrm{d}s_y.$$

Nyní proveďme limitní přechod pro "derivaci podle vnější normály". Z předpokladu $u \in C^2(\overline{\Omega})$ a z vlastností potenciálů pak plyne, že pro každé $x \in \partial\Omega$ platí:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(x) = \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(y)\,\mathrm{d}s_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)u(y)\,\mathrm{d}s_y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\int_\Omega \frac{1}{4\pi} f(y)\frac{1}{\|x-y\|}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}}$$

$$\underbrace{}_{=:\, K'\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)(x)} \qquad \underbrace{}_{=:\, D(u)(x)} \qquad \underbrace{}_{=:\, N_1(f)(x)}$$

Zjistili jsme, že pro řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ úlohy (DN) na $\partial\Omega$ platí:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}u &= V(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) - K(u) + N_0(f), \\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} &= K'(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) + D(u) + N_1(f). \end{aligned}}$$

4. Přímé metody.

- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

Zjistili jsme, že pro řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ úlohy (DN) na $\partial\Omega$ platí:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}u &= V(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) - K(u) + N_0(f), \\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} &= K'(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) + D(u) + N_1(f). \end{aligned}}$$

Dá se dokázat, že existuje V^{-1}, a proto z první rovnosti vyplývá, že

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = V^{-1}\Big(\frac{1}{2}I + K\Big)(u) - V^{-1}N_0(f).$$

4. Přímé metody.
• Dirichletova-Neumannova úloha.
• Steklov - Poincaré operátor.
• Slabé řešení (DN) úlohy.
• Signoriniho úloha.
• Kontaktní problém.
Literatura.

Zjistili jsme, že pro řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ úlohy (DN) na $\partial\Omega$ platí:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}u &= V(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) - K(u) + N_0(f), \\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} &= K'(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) + D(u) + N_1(f). \end{aligned}}$$

Dá se dokázat, že existuje V^{-1}, a proto z první rovnosti vyplývá, že

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = V^{-1}\Big(\frac{1}{2}I + K\Big)(u) - V^{-1}N_0(f).$$

Dosadíme-li tento vztah do druhé z výše uvedených rovností, dostaneme (na $\partial\Omega$) rovnost

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = \Big[\Big(\tfrac{1}{2}I + K'\Big)V^{-1}\Big(\tfrac{1}{2}I + K\Big) + D\Big](u) + \Big[N_1 - \Big(\tfrac{1}{2}I + K'\Big)V^{-1}N_0\Big](f)}$$

4. Přímé metody.
• Dirichletova-Neumannova úloha.
• Steklov - Poincaré operátor.
• Slabé řešení (DN) úlohy.
• Signoriniho úloha.
• Kontaktní problém.
Literatura.

Zjistili jsme, že pro řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ úlohy (DN) na $\partial\Omega$ platí:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}u &= V(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) - K(u) + N_0(f), \\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} &= K'(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}) + D(u) + N_1(f). \end{aligned}}$$

Dá se dokázat, že existuje V^{-1}, a proto z první rovnosti vyplývá, že

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = V^{-1}\Big(\frac{1}{2}I + K\Big)(u) - V^{-1}N_0(f).$$

Dosadíme-li tento vztah do druhé z výše uvedených rovností, dostaneme (na $\partial\Omega$) rovnost

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = \underbrace{\Big[\Big(\tfrac{1}{2}I + K'\Big)V^{-1}\Big(\tfrac{1}{2}I + K\Big) + D\Big]}_{\boxed{=:\, S}}(u) + \underbrace{\Big[N_1 - \Big(\tfrac{1}{2}I + K'\Big)V^{-1}N_0\Big]}_{\boxed{=:\, -N}}(f)}$$

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = Su - Nf.$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = S(u) := \left[\left(\tfrac{1}{2}I + K'\right)V^{-1}\left(\tfrac{1}{2}I + K\right) + D\right](u),}$$

4. Přímé metody.

- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = S(u) := \Big[\Big(\tfrac{1}{2}I + K'\Big)V^{-1}\Big(\tfrac{1}{2}I + K\Big) + D\Big](u),$$

kde

$$V(\lambda)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x-y\|}\lambda(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

$$K(u)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\Big(\frac{1}{\|x-y\|}\Big)u(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

$$K'(\lambda)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\Big(\frac{1}{\|x-y\|}\Big)\lambda(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

$$D(u)(x) := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y}\Big(\frac{1}{\|x-y\|}\Big)u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = S(u) := \left[\left(\tfrac{1}{2}I + K'\right)V^{-1}\left(\tfrac{1}{2}I + K\right) + D\right](u),}$$

kde

$$V(\lambda)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x-y\|} \lambda(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

$$K(u)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

$$K'(\lambda)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x} \left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) \lambda(y)\,\mathrm{d}s_y,$$

$$D(u)(x) := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_x} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) u(y)\,\mathrm{d}s_y.$$

Dá se ukázat, že

$$V:\ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ \ K:\ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

$$K':\ H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ \ D:\ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

$$\boxed{S:\ H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

jsou spojitými lineárními operátory.

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

$$(\mathrm{DN}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = g & \text{na } \Gamma_2, \end{cases}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 má "*kladnou míru*", $g \in L^2(\Gamma_2)$, $f \in L^2(\Omega)$.

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

$$(\mathrm{DN}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = g & \text{na } \Gamma_2, \end{cases}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 má "*kladnou míru*", $g \in L^2(\Gamma_2)$, $f \in L^2(\Omega)$.

Slabým řešením úlohy (DN) rozumíme funkci $u \in \mathcal{W} := \{v \in H^1(\Omega) : \ Tv = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$ takovou, že

$$\forall v \in \mathcal{W} : \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g T v \,\mathrm{d}s.$$

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

$$(\mathrm{DN}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = g & \text{na } \Gamma_2, \end{cases}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 má "*kladnou míru*", $g \in L^2(\Gamma_2)$, $f \in L^2(\Omega)$.

Slabým řešením úlohy (DN) rozumíme funkci $u \in \mathcal{W} := \{v \in H^1(\Omega) : \ Tv = 0$ na $\Gamma_1\}$ takovou, že

$$\forall v \in \mathcal{W} : \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} g T v \, \mathrm{d}s.$$

Slabým hraničním řešením úlohy (DN) rozumíme funkci $u \in W := \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \ v = 0$ na $\Gamma_1\}$ takovou, že

$$\forall v \in W : \quad \langle Su, v \rangle = \langle Nf, v \rangle + \int_{\Gamma_2} g v \, \mathrm{d}s.$$

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

Uvažujme Signoriniho problém

$$
\text{(SP)} \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_u, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = 0 & \text{na } \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 & \text{na } \Gamma_c, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \geq 0 & \text{na } \Gamma_c, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(u-g) = 0 & \text{na } \Gamma_c, \end{cases}
$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c$, $f \in L^2(\Omega)$ a $g \in L^2(\Gamma_c)$.

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

Uvažujme Signoriniho problém

$$
\text{(SP)} \quad \left\{ \begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_u, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} &= 0 \quad \text{na } \Gamma_f, \\ u - g &\geq 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} &\geq 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(u-g) &= 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \end{aligned} \right.
$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c$, $f \in L^2(\Omega)$ a $g \in L^2(\Gamma_c)$.

Slabým řešením úlohy (SP) rozumíme funkci $u \in \mathcal{K} := \{v \in H^1(\Omega) : \; Tv = 0 \text{ na } \Gamma_u, \; Tv - g \geq 0 \text{ na } \Gamma_c\}$ takovou, že

$$
\boxed{\forall v \in \mathcal{K} : \quad \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(v-u)\,\mathrm{d}x.}
$$

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

Uvažujme Signoriniho problém

$$(\mathrm{SP}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \Gamma_u, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = 0 & \text{na } \Gamma_f, \\ u - g \geq 0 & \text{na } \Gamma_c, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \geq 0 & \text{na } \Gamma_c, \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(u - g) = 0 & \text{na } \Gamma_c, \end{cases}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s dost hladkou hranicí $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c$, $f \in L^2(\Omega)$ a $g \in L^2(\Gamma_c)$.

Slabým hraničním řešením úlohy (SP) rozumíme funkci $u \in K := \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : v = 0 \text{ na } \Gamma_u,\ v - g \geq 0 \text{ na } \Gamma_c\}$ takovou, že

$$\forall v \in K : \quad \langle Su, v - u \rangle \geq \langle Nf, v - u \rangle.$$

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

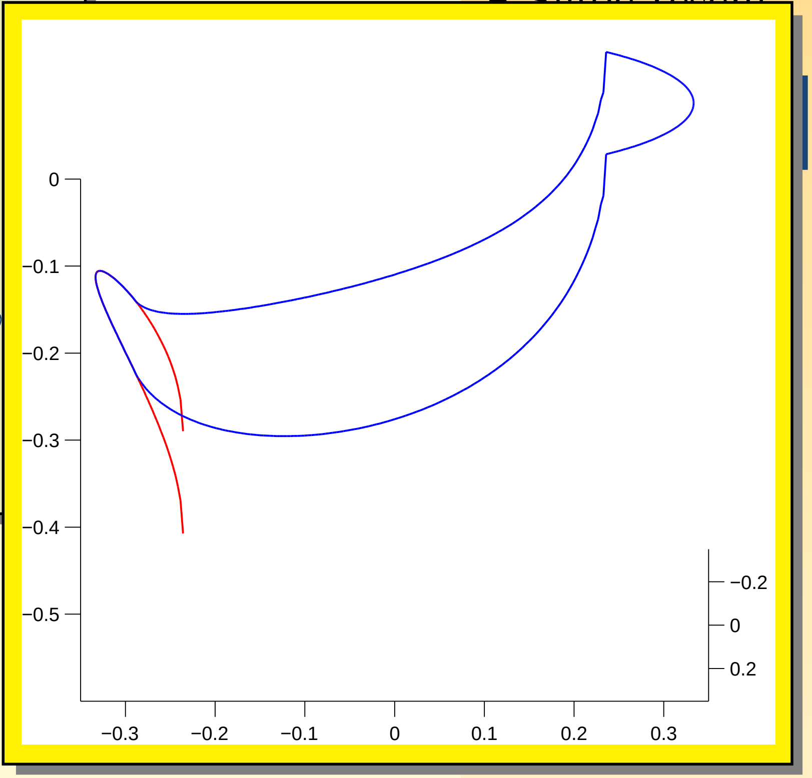
Příklad.

$$\begin{cases} -\Delta u = -3 \text{ v } \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < \frac{1}{9}\}, \\[2ex] u = 0 \text{ na } \Gamma_u := \{(x,y) \in \partial\Omega : \ |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{6}, \ y > 0\}, \\[2ex] u - g \geq 0, \ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \geq 0, \ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(u-g) = 0 \text{ na } \Gamma_c, \\[2ex] \quad \text{kde } g(x,y) := \sqrt{\frac{1}{18} - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{6} - 0.2, \\[2ex] \qquad\qquad \Gamma_c := \{(x,y) \in \partial\Omega : \ |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{6}, \ y < 0\}, \\[2ex] \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = 0 \text{ na } \Gamma_f := \partial\Omega \setminus \{\Gamma_u \cup \Gamma_c\}. \end{cases}$$

4. Přímé metody.
• Dirichletova-Neumannova úloha.
• Steklov - Poincaré operátor.
• Slabé řešení (DN) úlohy.
• Signoriniho úloha.
• Kontaktní problém.
Literatura.

Příklad.

$$\begin{cases} -\Delta u = -3 \ \text{ v } \ \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < \frac{1}{9}\}, \\ u = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_u := \{(x,y) \in \partial\Omega : \ |x| \le \frac{\sqrt{2}}{6}, \ y > 0\}, \\ u - g \ge 0, \ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \ge 0, \ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}(u - g) = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_c, \\ \quad \text{kde } \ g(x,y) := \sqrt{\frac{1}{18} - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{6} - 0.2, \\ \qquad \Gamma_c := \{(x,y) \in \partial\Omega : \ |x| \le \frac{\sqrt{2}}{6}, \ y < 0\}, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_f := \partial\Omega \setminus \{\Gamma_u \cup \Gamma_c\}. \end{cases}$$



4. Přímé metody.

- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení

Uvažujme kontaktní problém

$$
\text{(KP)} \qquad \left\{ \begin{aligned} -\Delta u^m &= f \quad \text{v } \Omega^m, \\ u^1 &= 0 \text{ na } \Gamma_u^1, \\ \frac{\mathrm{d}u^m}{\mathrm{d}n} &= 0 \text{ na } \Gamma_f^m, \\ u^2 - u^1 \geq 0,\ \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}n} &\geq 0,\ \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}n}(u^2 - u^1) = 0, \\ \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}n} + \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}n} &= 0 \text{ na } \Gamma_c, \end{aligned} \right.
$$

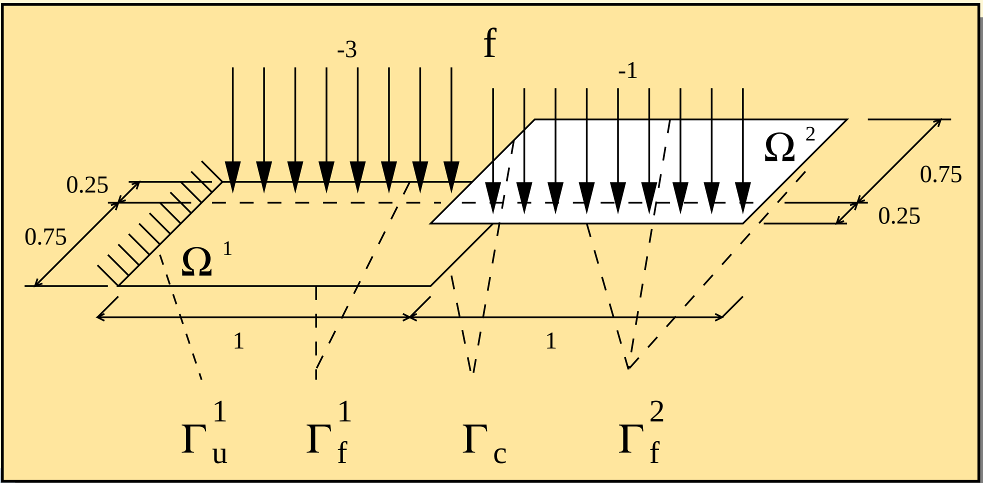
kde $m = 1,\ 2,\ \Omega^1 := (0,1) \times (0,1),\ \Omega^2 := (1,2) \times (0,1),\ f = \ \ldots$

4. Přímé metody.
• Dirichletova-Neumannova úloha.
• Steklov - Poincaré operátor.
• Slabé řešení (DN) úlohy.
• Signoriniho úloha.
• Kontaktní problém.
Literatura.

Uvažujme kontaktní problém

$$
\text{(KP)} \quad \begin{cases}
-\Delta u^m = f \quad \text{v } \Omega^m, \\
u^1 = 0 \ \text{na } \Gamma_u^1, \\
\dfrac{du^m}{dn} = 0 \ \text{na } \Gamma_f^m, \\
u^2 - u^1 \geq 0, \ \dfrac{du^2}{dn} \geq 0, \ \dfrac{du^2}{dn}(u^2 - u^1) = 0, \\
\dfrac{du^1}{dn} + \dfrac{du^2}{dn} = 0 \ \text{na } \Gamma_c,
\end{cases}
$$

kde $m = 1,\ 2,\ \Omega^1 := (0,1) \times (0,1),\ \Omega^2 := (1,2) \times (0,1),\ f = \ \ldots$



4. Přímé metody.
• Dirichletova-Neumannova úloha.
• Steklov - Poincaré operátor.
• Slabé řešení (DN) úlohy.
• Signoriniho úloha.
• Kontaktní problém.
Literatura.

BETI metoda pro semikoercivní 2D kontaktní úlohu.

Každou z oblastí Ω^m rozložme na p^m navzájem disjunktních podoblastí, tj. $\Omega^m \approx \Omega_1^m \cup \Omega_2^m \cup ... \cup \Omega_{p^m}^m$, s lipschitzovskými hranicemi $\Gamma_i^m := \partial\Omega_i^m$ a průměry menšími než 1.

4. Přímé metody.
• Dirichletova-Neumannova úloha.
• Steklov - Poincaré operátor.
• Slabé řešení (DN) úlohy.
• Signoriniho úloha.
• Kontaktní problém.
Literatura.

Každou z oblastí Ω^m rozložme na p^m navzájem disjunktních podoblastí, tj. $\Omega^m \approx \Omega_1^m \cup \Omega_2^m \cup \ldots \cup \Omega_{p^m}^m$, s lipschitzovskými hranicemi $\Gamma_i^m := \partial\Omega_i^m$ a průměry menšími než 1.

Nechť S_i^m a $N_i^m f$ označují lokální Steklovovy-Poincarého operátory a lokální Newtonovy potenciály.

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

Každou z oblastí Ω^m rozložme na p^m navzájem disjunktních podoblastí, tj. $\Omega^m \approx \Omega_1^m \cup \Omega_2^m \cup \ldots \cup \Omega_{p^m}^m$, s lipschitzovskými hranicemi $\Gamma_i^m := \partial\Omega_i^m$ a průměry menšími než 1.

Nechť S_i^m a $N_i^m f$ označují lokální Steklovovy-Poincarého operátory a lokální Newtonovy potenciály.

Slabým hraničním řešením (KP) rozumíme funkci

$$(u^1, u^2) \in \mathcal{K} := \left\{ (v^1, v^2) \in H_0^{1/2}(\Gamma_s^1, \Gamma_u^1) \times H^{1/2}(\Gamma_s^2) : \ v^2 - v^1 \geq 0 \quad \text{na } \Gamma_c \right\},$$

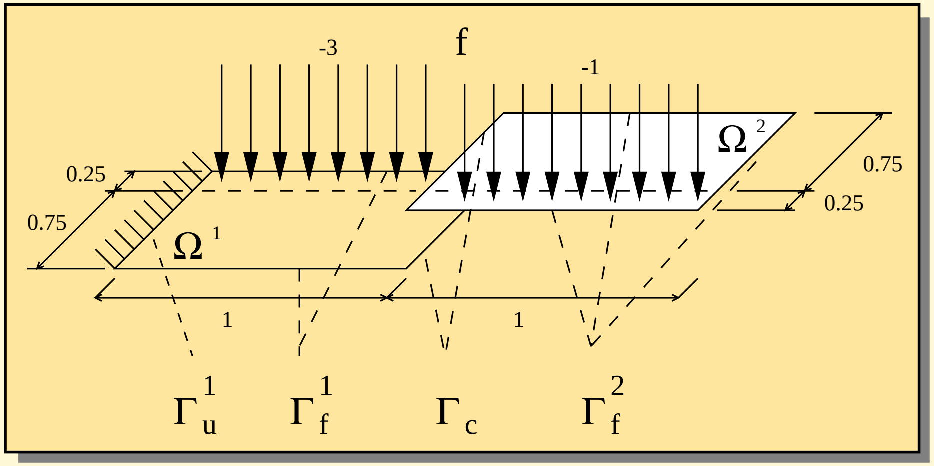
kde $\Gamma_s^m := \bigcup_{i=1}^{p^m} \Gamma_i^m$, takovou, že

$$\boxed{\forall (v^1, v^2) \in \mathcal{K} : \ \sum_{m=1}^{2} \sum_{i=1}^{p^m} \langle S_i^m u_i^m, v_i^m - u_i^m \rangle \geq \sum_{m=1}^{2} \sum_{i=1}^{p^m} \langle N_i^m f, v_i^m - u_i^m \rangle,}$$

kde $u_i^m := u^m|_{\Gamma_i^m}$, $v_i^m := v^m|_{\Gamma_i^m}$.

4. Přímé metody.
• Dirichletova-Neumannova úloha.
• Steklov - Poincaré operátor.
• Slabé řešení
y.
ho
ní

BETI metoda pro semikoercivní 2D kontaktní úlohu.

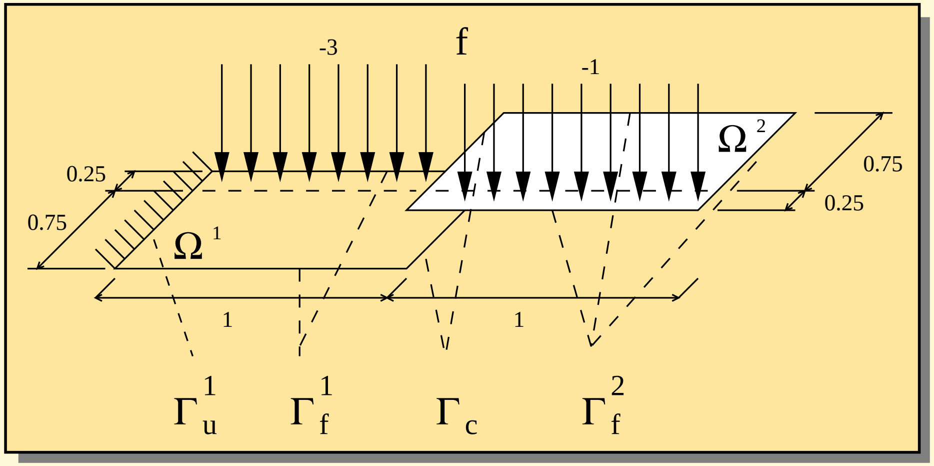


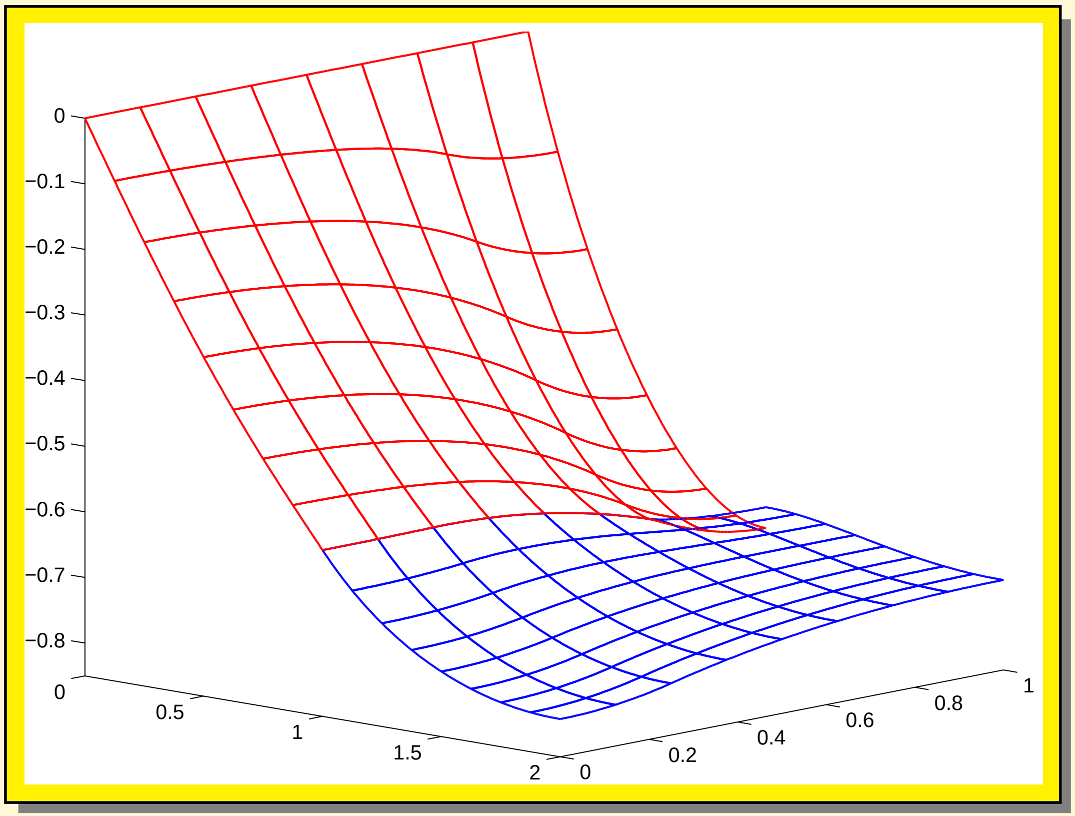
4. Přímé metody.

- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

BETI metoda pro semikoercivní 2D kontaktní úlohu.





4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.

- J. Bouchala, Z. Dostál, M. Sadowská: *Theoretically supported scalable BETI method for variational inequalities*, přijato k publikaci v Computing, 2007;
- I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovíšek: *Riešenie variačných nerovností v mechanike*, Alfa, Bratislava, 1982;
- O. John, J. Nečas: *Rovnice matematické fyziky*, MFF UK, Praha, 1981;
- U. Langer, O. Steinbach: *Boundary element tearing and interconnecting methods*, Computing 71 (2003), 205-228;
- W. McLean: *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, 2000;
- M. Sadowská: *Řešení variačních nerovnic pomocí hraničních integrálních rovnic*, diplomová práce, VŠB-TU Ostrava, 2005;
- O. Steinbach: *Stability estimates for hybrid coupled domain decomposition methods*, Springer – Verlag, Heidelberg, 2003.

4. Přímé metody.
- Dirichletova-Neumannova úloha.
- Steklov - Poincaré operátor.
- Slabé řešení (DN) úlohy.
- Signoriniho úloha.
- Kontaktní problém.

Literatura.