ARZELÀ ASCOLIHO VĚTA

Nový nadpis 18.3.2010

VĚTA:

Nechť $M \subseteq C(\langle a,b \rangle)$ splňuje následující podmínky:

(1) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall u \in M)(\forall x, y \in \langle a,b \rangle, |x-y| < \delta)$:
$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon$$
(stejná stejnoměrná spojitost)

(2) $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall u \in M)(\forall x \in \langle a,b \rangle)$: $|u(x)| \leq K$
(stejná omezenost)

PAK množina M je relativně kompaktní v $C(\langle a,b \rangle)$.

DŮKAZ: Máme vlastně ukázat, že z každé posloupnosti (u_n) funkcí z M lze vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost (v $\langle a,b \rangle$)

Nechť tedy (u_n) : $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$ je libovolná posloupnost funkcí z M.

Vezměme nyní všechna racionální čísla z $\langle a,b \rangle$ a srovnejme je do posloupnosti $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots$

Protože číselná posloupnost $(u_n(\tau_1))$ je omezená, můžeme z posloupnosti

$$\boxed{u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots}$$

vybrat podposloupnost

$$\boxed{u_{11},\ u_{12},\ u_{13},\ \ldots},$$

která konverguje v bodě τ_1.

Podobně z posloupnosti $u_{11}, u_{12}, u_{13}, \ldots$ lze vybrat posloupnost $\boxed{u_{21}, u_{22}, u_{23}, \ldots}$ která je konvergentní v τ_2 (ale i v τ_1)

Indukcí získáme posloupnosti

$$\left[\begin{array}{llll l}
\boxed{u_{11}}, & u_{12}, & u_{13}, & \ldots & \text{(konverguje v } \tau_1) \\
u_{21}, & \boxed{u_{22}}, & u_{23}, & \ldots & \text{(konv. v } \tau_1, \tau_2) \\
u_{31}, & u_{32}, & \boxed{u_{33}}, & \ldots & \text{(konv. v } \tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
\vdots & & & & \qquad \vdots
\end{array}\right]$$

Uvažujme nyní posloupnost $\boxed{u_{11}}, \boxed{u_{22}}, \boxed{u_{33}}, \ldots$

Není obtížné si uvědomit, že tato posloupnost je vybraná z $u_1, u_2, u_3, \ldots$

O této posloupnosti navíc ukážeme, že je stejnoměrně konvergentní – tím bude důkaz proveden.

Jistě také platí, že (číselná) posloupnost

$u_{11}(t), u_{22}(t), u_{33}(t), \ldots$

je konvergentní (a tedy i Cauchyovská) v libovolném racionálním bodě intervalu $\langle a, b \rangle$. Skutečně, pokud τ_i je libovolný racionální bod intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je jistě posloupnost $u_{ii}, u_{i+1,i+1}, \ldots$

vybranou posloupností z posloupnosti

$u_{i1}, u_{i2}, \ldots,$

která je konvergentní v τ_i.

[Posloupnost $u_{11}(t), u_{22}(t), u_{33}(t), \ldots$ je konvergentní ve všech racionálních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$.]

[Potřebujeme však ukázat, že posloupnost funkcí $u_{11}, u_{22}, u_{33}, \ldots$ je stejnoměrně konvergentní v $\langle a, b \rangle$]

Stačí, když ukážeme B–C podmínku:

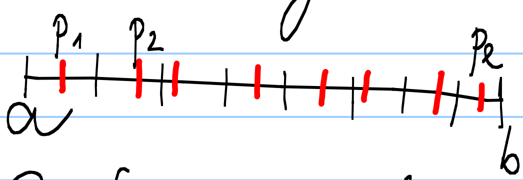
$$\left[(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall t\in\langle a,b\rangle)(\forall m,n\in\mathbb{N},\ m,n>n_0):\ |u_{m,m}(t)-u_{n,n}(t)|<\varepsilon\right]$$

Nechť tedy $\varepsilon>0$ je libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{3}$ (>0) existuje $\delta>0$ takové, že

$$\left[(\forall u\in M)(\forall x,y\in\langle a,b\rangle,\ |x-y|<\delta):\ |u(x)-u(y)|<\frac{\varepsilon}{3}\right]$$

$\circledast$ (podmínka (1))

Nyní toto $\delta>0$ považujme za pevné.
Rozdělme interval $\langle a,b\rangle$ na konečný počet podintervalů délky $<\frac{\delta}{2}$ a z každého z těchto podintervalů vyberme racionální bod.



Množinu takových bodů označme $P=\{p_1,p_2,\dots,p_k\}$.
(P je konečná množina).
Pak platí, že

$$(\forall t\in\langle a,b\rangle)(\exists p\in P):\ |t-p|<\delta.$$

P je konečná δ-síť intervalu $\langle a,b\rangle$.

Víme, že posloupnost $(u_{mn}(t))$ je Cauchyovská ve všech bodech z P. Tj.

$$\left(\forall i \in \{1,\dots,l\}\right)\left(\exists n_0^i \in \mathbb{N}\right)\left(\forall m,n \in \mathbb{N},\ m,n > n_0^i\right):$$

$$|u_{mm}(p_i) - u_{mn}(p_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \left(\begin{matrix}\varepsilon>0 \\ \text{již je dáno}\end{matrix}\right)$$

Proto existuje $n_0 \ (= \max\{n_0^1, \dots, n_0^l\})$ takové, že pro libovolné $p \in P$ a libovolné $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n > n_0$ platí

$$|u_{mm}(p) - u_{mn}(p)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Uvědomme si, že n_0 závisí pouze na ε.

Zvolme libovolná $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n > n_0$.
Dále zvolme libovolné $t \in \langle a,b\rangle$. Pak k tomuto t existuje $p \in P$ takové, že $|t-p| < \delta$.

PLATÍ:

$$|u_{mm}(t) - u_{mn}(t)| \le \overbrace{|u_{mm}(t) - u_{mm}(p)|}^{<\frac{\varepsilon}{3}\ (\text{podm. } *)} +$$

$$+ \underbrace{|u_{mm}(p) - u_{mn}(p)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|u_{mn}(p) - u_{mn}(t)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ (\text{podm. } *)} < \varepsilon.$$

$\square$