Katedra aplikované matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB – TU Ostrava

VĚTY O MINIMAXU A JEJICH POUŽITÍ

Jiří Bouchala

2002

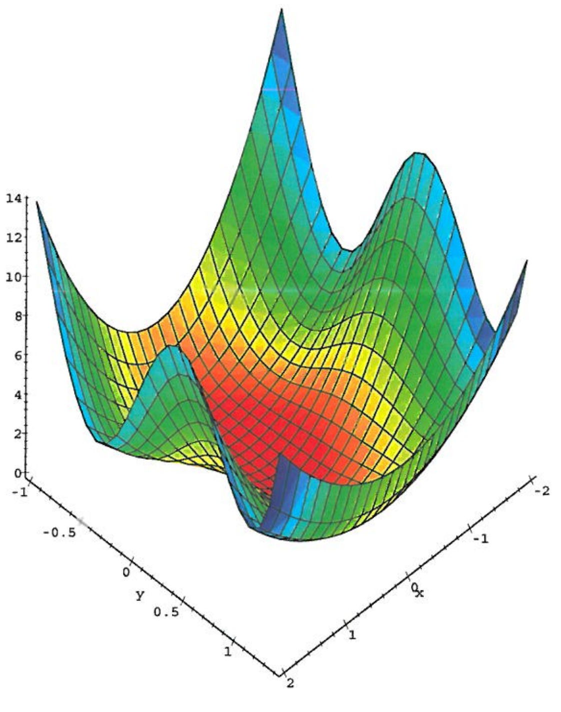
1. Úvod

Spousta problémů, speciálně řešení řady diferenciálních rovnic, vede k úkolu najít stacionární bod nějakého funkcionálu. Zabývejme se chvíli otázkou existence takového bodu. Uvažujme nejdříve zobrazení

$$J:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

a hledejme podmínky, které zaručí existenci stacionárního bodu J. Představme si pro inspiraci tyto tři situace:

První případ



$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \qquad \inf_{u\in\mathbb{R}^2} J(u) \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Nenechme se zmást obrázkem k tvrzení, že

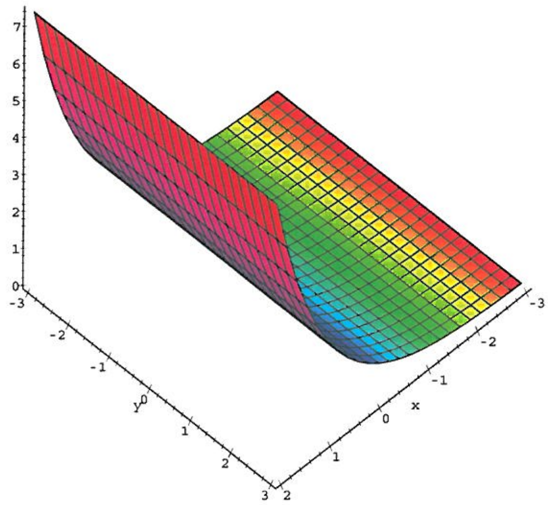
$$c \overset{\text{def.}}{=} \inf_{u\in\mathbb{R}^2} J(u)$$

je pak nutně kritickou hodnotou zobrazení J, tj. že existuje bod $u \in \mathbb{R}^2$ takový, že

$$J(u) = c, \quad J'(u) = 0.$$

Jako protipříklad dobře poslouží tato funkce:

$$J(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{e}^x.$$



Zřejmě

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} J(x,y) = 0 \in \mathbb{R},$$

ale protože pro každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x > 0,$$

neexistuje žádný stacionární bod funkce J.

Nicméně, dá se dokázat (viz [43]), že za situace (1.1) existuje posloupnost (u_n) v $\mathbb{R}^2$ taková, že

$$J(u_n) \to c = \inf_{u\in\mathbb{R}^2} J(u) \quad \text{a že} \quad J'(u_n) \to 0.$$

Pokud bychom věděli, že z takovéto posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní, bylo by zřejmě c kritickou hodnotou J.

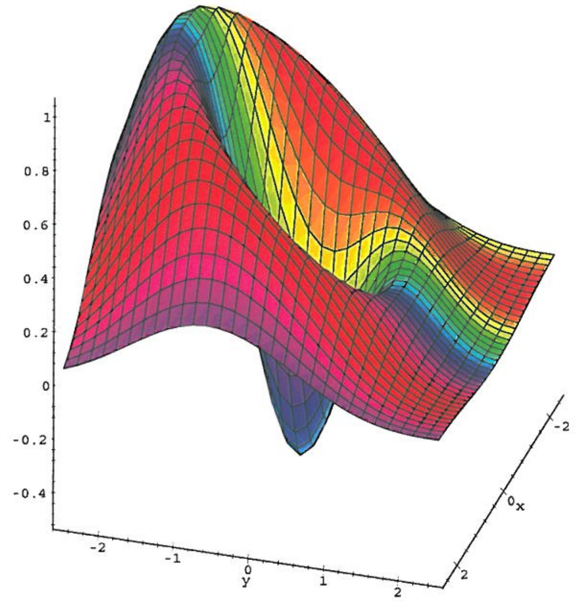
$$\Big(u_n \to u,\ J(u_n) \to c,\ J'(u_n) \to 0 \overset{J\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}{\Longrightarrow} J(u) = c,\ J'(u) = 0.\Big)$$

Toho lze docílit například přidáním předpokladu:[1]

$$\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } \mathbb{R}^2, \\ (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \to 0, \end{array}\right\} \Longrightarrow (u_n) \text{ je omezená posloupnost.} \qquad (1.2)$$

[1]Připomeňme si, že v $\mathbb{R}^2$ – stejně jako v každém jiném Banachově prostoru konečné dimenze – platí, že *z každé omezené posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní.*

Druhý případ



$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$r \in \mathbb{R}^+,\ e \in \mathbb{R}^2,\ \|e\|_{\mathbb{R}^2} > r, \quad (1.3)$$

$$\inf_{\|u\|_{\mathbb{R}^2}=r} J(u) > J(0) \geq J(e)$$

$$(\text{zde } 0 \overset{\text{ozn.}}{=} (0,0) \in \mathbb{R}^2).$$

Nabízí se takováto myšlenka: uvažujme všechny křivky ležící na grafu funkce J a jdoucí z bodu $(0, J(0))$ do bodu $(e, J(e))$; na každé z těchto křivek vezměme *nejvyšší* bod. Zdá se, že *nejnižší* z takto vybraných bodů odpovídá stacionárnímu bodu funkce J.

Řekněme to přesněji: obrázek svádí k domněnce, že

$$c \overset{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} J(\gamma(t)),$$

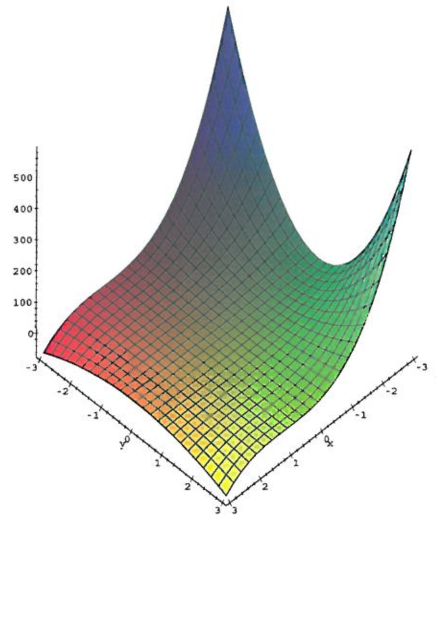
kde

$$\Gamma \overset{\text{def.}}{=} \{\gamma \in C(\langle 0,1 \rangle, \mathbb{R}^2) :\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\},$$

je kritickou hodnotou J. Nemusí to být pravda!

Hezký protipříklad nalezli Brézis s Nirenbergem (viz [18]):

$$J(x, y) \overset{\text{def.}}{=} x^2 + (1 - x)^3 y^2.$$



Volme

$$r = \frac{1}{2}, \ e = (2,2).$$

Pak zřejmě platí:

$$J(0) = 0 = J(e),$$

$$\inf_{\|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2}=r} J(x,y) = \min_{\|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2}=r} J(x,y) > 0.$$

Na druhou stranu snadno spočteme, že

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,y) = 2x - 3(1-x)^2 y^2,$$

$$\frac{\partial J}{\partial y}(x,y) = 2(1-x)^3 y,$$

a proto bod 0 je jediným stacionárním bodem J, přičemž $J(0) < c$; c není kritickou hodnotou J.

Příčinou potíží je tato skutečnost: volíme-li křivky $\gamma_n \in \Gamma$ a body $u_n \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

$$\max_{t \in \langle 0,1 \rangle} J(\gamma_n(t)) = J(u_n) \to c,$$

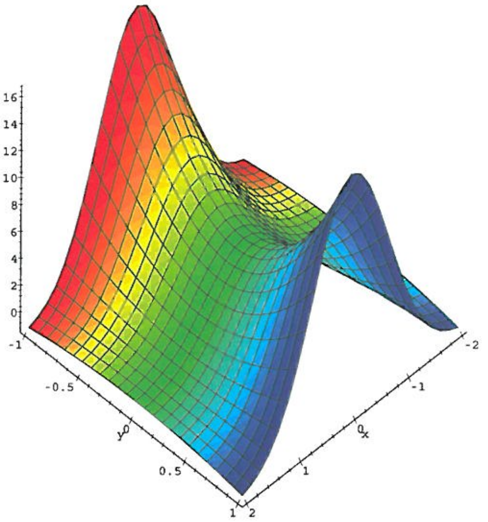
je $\|u_n\| \to \infty$.

Dá se však ukázat (viz [43]), že i za situace (1.3) existuje posloupnost (u_n) v $\mathbb{R}^2$ taková, že

$$J(u_n) \to c \text{ a že } J'(u_n) \to 0.$$

I zde lze tedy situaci zachránit, budeme-li kromě (1.3) předpokládat i (1.2).

Třetí případ



$$J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$\varrho \in \mathbb{R}^+, \tag{1.4}$$

$$\inf_{u \in \{(0,y):\ y \in \mathbb{R}\}} J(u) > \max_{u \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} J(u).$$

Opět: obrázek zrádně napovídá, že

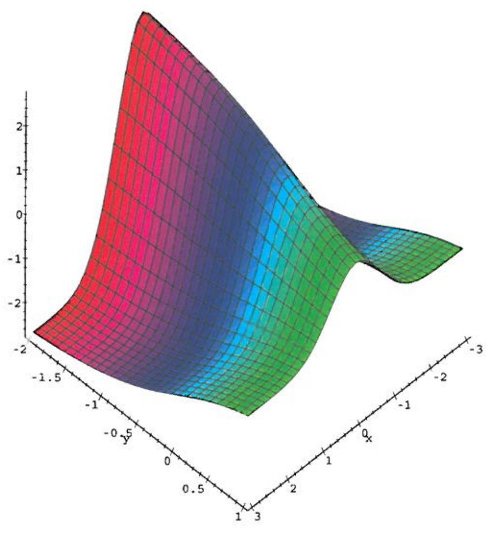
$$c \overset{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle -\varrho, \varrho \rangle} J(\gamma(t)), \tag{1.5}$$

kde

$$\Gamma = \{\gamma \in C(\langle -\varrho, \varrho\rangle, \mathbb{R}^2) :\ \gamma(-\varrho) = (-\varrho, 0),\ \gamma(\varrho) = (\varrho, 0)\},$$

je kritickou hodnotou funkcionálu J. Opět dokažme pomocí protipříkladu, že tomu tak nemusí být:

$$J(x,y) \overset{\text{def.}}{=} (2\mathrm{e}^{-x^2} - 1) \operatorname{arccotg} y.$$



Volme $\varrho = 1$. Pak zřejmě platí:

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} J(0, y) = 0 > \max\{J(-\varrho, 0), J(\varrho, 0)\} = \left(\frac{2 - \mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right) \frac{\pi}{2}.$$

Na druhou stranu, protože

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, y) = -4x\mathrm{e}^{-x^2} \operatorname{arccotg} y,$$

$$\frac{\partial J}{\partial y}(x, y) = -(2\mathrm{e}^{-x^2} - 1)\frac{1}{1 + y^2},$$

neexistuje žádný stacionární bod J.

Příčinou nezdaru je totéž, co u předchozího příkladu, a opět: předpokládáme-li kromě (1.4) i splnění podmínky (1.2), je vztahem (1.5) definované číslo c kritickou hodnotou J.

2. Věty o „minimaxu“

V této kapitole se budeme zabývat zobecněním dříve uvedených úvah pro funkcionály

$$J \in C^1(X, \mathbb{R}),$$

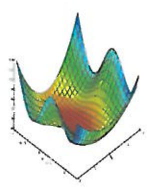
kde X je (reálný) Banachův prostor. Předpoklad (1.2) je však nutno nahradit „tvrdším“ omezením – tzv. Palaisovou – Smaleovou podmínkou (důvodem je skutečnost, že v nekonečně dimenzionálním prostoru existují omezené množiny, které nejsou relativně kompaktní):

Definice. Řekneme, že *funkcionál J splňuje Palaisovu – Smaleovu podmínku* (zkráceně *(PS) podmínku*), platí-li implikace:

$$\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } X, \\ (J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \to 0 \ \text{ v } X^*, \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{z posloupnosti } (u_n) \text{ lze} \\ \text{vybrat posloupnost} \\ \text{konvergentí (v } X). \end{array}$$

Následující část této kapitoly rozdělíme do čtyř podkapitol. V každé z nich uvedeme příslušnou větu, a potom její použití při důkazu existence slabého řešení jisté okrajové úlohy. Poznamenejme ještě, že důkazy zmíněných vět lze nalézt – například – v [38, 40, 43] .

2.1. Ekelandův variační princip.



Věta 2.1 („Ekeland variational principle“; Ekeland, 1974).
Nechť X je Banachův prostor a nechť funkcionál $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ je na X omezený zdola a splňuje (PS) podmínku. Pak existuje

$$\min_{u \in X} J(u).$$

Nyní přistupme ke slíbenému příkladu.

Věta 2.2. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ *je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť* $f \in L^2(\Omega)$. *Potom úloha*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \;\; na \;\; \Omega, \\ \quad u = 0 \;\; na \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ *právě jedno slabé řešení.*

Důkaz Věty 2.2.
Uvažujme Sobolevův prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ s normou

$$\|u\| \stackrel{def.}{=} \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}.$$

Je známo, že slabá řešení úlohy (2.1) odpovídají stacionárním bodům funkcionálu

$$J \in C^1\left(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R}\right),$$
$$J(u) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega fu \, dx \tag{2.2}$$

s derivací

$$\langle J'(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \, dx - \int_\Omega f\varphi \, dx. \tag{2.3}$$

Dále si připomeňme, že

$$W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega) \tag{2.4}$$

(symbolem „$\subset\subset$" zde míníme *kompaktní vnoření* a symbolem „$\subset$" *spojité vnoření*), a proto existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ platí:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\int_\Omega u^2 \, dx} \leq c\|u\|.$$

Odtud a z (2.2) pomocí Hölderovy nerovnosti získáme informaci:

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}c\|u\| \to \infty \text{ pro } \|u\| \to \infty, \tag{2.5}$$

z níž vyplývá, že funkcionál J je na $W_0^{1,2}(\Omega)$ omezený zdola. K dokončení důkazu, že J nabývá na $W_0^{1,2}(\Omega)$ svého minima (v němž je pak nutně stacionární bod), stačí ukázat (viz Větu 2.1), že J splňuje (PS) podmínku.

Předpokládejme, že pro posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ platí:

$$
\begin{aligned}
&(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\
&J'(u_n) \to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Odtud a z (2.5) snadno plyne, že posloupnost (u_n) je omezená. Protože $W_0^{1,2}(\Omega)$ je reflexivní Banachův prostor, existuje $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) taková, že

$$u_n \rightharpoonup u \text{ ve } W_0^{1,2}(\Omega).$$

Navíc, protože

$$J'(u_n) \to 0,$$

platí:

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega f(u_n - u)\ \mathrm{d}x \to 0. \tag{2.7}$$

Všimněme si, že:

- $|\int_\Omega f(u_n - u)\ \mathrm{d}x| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0$,
  protože díky $u_n \rightharpoonup u$ v $W_0^{1,2}(\Omega)$ a kompaktnímu vnoření (2.4) platí,
  že $u_n \to u$ v $L^2(\Omega)$;
- zobrazení $\varphi \mapsto \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\ \mathrm{d}x$ patří do $\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*$
  ($|\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\ \mathrm{d}x| \leq \|u\|\|\varphi\|$), a proto $\int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u)\ \mathrm{d}x \to 0$.

Z těchto pozorování a ze vztahu (2.7) snadno zjistíme, že

$$0 \leftarrow \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla(u_n - u)\ \mathrm{d}x = \|u_n - u\|^2,$$

a proto

$$u_n \to u.$$

To jsme si přáli dokázat.

Dokázali jsme existenci slabého řešení úlohy (2.1). Nyní dokažme jeho jednoznačnost.

Předpokládejme, že funkce u_1 a u_2 jsou slabá řešení úlohy (2.1); tzn. že

$$u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \text{a že} \quad J'(u_1) = J'(u_2) = 0.$$

Odtud a z (2.3) plyne:

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_\Omega \nabla u_1 \nabla(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_2 \nabla(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_\Omega f(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}x = 0,$$

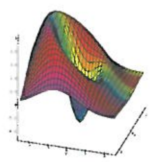
a proto

$$u_1 = u_2.$$

To bylo naším cílem prokázat.

□

2.2. Věta o přechodu hory.



Věta 2.3 („Mountain pass theorem"; Ambrosetti, Rabinowitz, 1973). *Nechť*

- *X je Banachův prostor,*
- *$J \in C^1(X, \mathbb{R})$,*
- *$r \in \mathbb{R}^+$, $e \in X$, $\|e\|_X > r$,*
- *$\inf\limits_{\|u\|_X = r} J(u) > J(0) \geq J(e)$,*
- *J splňuje (PS) podmínku.*

Potom

$$c \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} J(\gamma(t)),$$

$$\textit{kde } \Gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \{\gamma \in C(\langle 0,1 \rangle, X) : \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = e\},$$

je kritickou hodnotou funkcionálu J.

Věta 2.4. *Dirichletova úloha*

$$\begin{cases} -u'' = u^3 \ \ v\ (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

má ve $W_0^{1,2}(0,\pi)$ alespoň jedno `netriviální` *slabé řešení.*

Důkaz Věty 2.4.

Slabá řešení úlohy (2.8) odpovídají kritickým bodům funkcionálu

$$J : W_0^{1,2}(0,\pi) \to \mathbb{R},$$

$$J(u) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}\int_0^\pi (u'(x))^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^\pi (u(x))^4 \, \mathrm{d}x.$$

Je známo (opatrný čtenář si důkaz může vyhledat v [43]), že

$$J \in C^1\left(W_0^{1,2}(0,\pi), \mathbb{R}\right)$$

a že

$$\langle J'(u), \varphi\rangle = \int_0^\pi u'(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x - \int_0^\pi (u(x))^3 \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Dále lze v [30] vyhledat, že

$$W_0^{1,2}(0,\pi) \subset\subset C(\langle 0,\pi\rangle) \subset L^4(0,\pi),$$

a proto existuje $c \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ platí:[2]

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|^4_{L^4(0,\pi)} \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}c\|u\|^4.$$

Odtud plyne, že existuje $r \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0) = 0.$$

Nyní vezměme libovolné

$$0 \not\equiv u \in W_0^{1,2}(0,\pi) \text{ a } t \in \mathbb{R}.$$

Potom

$$J(tu) = \frac{1}{2}t^2 \int_0^\pi (u'(x))^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}t^4 \int_0^\pi (u(x))^4 \, \mathrm{d}x \to -\infty \text{ pro } t \to +\infty,$$

a proto existuje $e = tu \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ takové, že

$$\|e\| > r, \quad J(e) \leq 0 = J(0).$$

[2] Připomeňme si, že v prostoru $W_0^{1,2}(0,\pi)$ je norma definovaná předpisem

$$\|u\| \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\int_0^\pi (u'(x))^2 \, \mathrm{d}x}\,.$$

Dokázali jsme, že funkcionál J splňuje „geometrické" předpoklady Věty 2.3. Zbývá dokázat, že funkcionál J splňuje (PS) podmínku. Buď (u_n) Palaisova – Smaleova posloupnost ve $W_0^{1,2}(0,\pi)$, tj. nechť platí:

$$\begin{aligned} s &\overset{\text{def.}}{=} \sup\{|J(u_n)| : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}, \\ J'(u_n) &\to 0 \text{ ve } \left(W_0^{1,2}(0,\pi)\right)^*. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Odtud snadno plyne, že pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$s + \|u_n\| \ge J(u_n) - \frac{1}{4}\langle J'(u_n), u_n\rangle = \frac{1}{4}\|u_n\|^2,$$

a proto posloupnost (u_n) je omezená. Dále postupujme analogicky (a proto rychleji) jako v důkazu Věty 2.2. Protože $W_0^{1,2}(0,\pi)$ je reflexivní Banachův prostor, existuje $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) taková, že $u_n \rightharpoonup u$ ve $W_0^{1,2}(0,\pi)$. Z předpokladu (2.9) pak vyplývá:

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle = \int_0^\pi u_n'(u_n - u)' \,\mathrm{d}x - \int_0^\pi u_n^3(u_n - u) \,\mathrm{d}x \to 0.$$

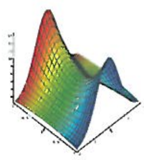
Odtud získáme:

$$0 \leftarrow \int_0^\pi u_n'(u_n - u)' \,\mathrm{d}x - \int_0^\pi u'(u_n - u)' \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi (u_n - u)'(u_n - u)' \,\mathrm{d}x = \|u_n - u\|^2,$$

a proto $u_n \to u$.

$\square$

2.3. Věta o sedlovém bodě.



Věta 2.5 („Saddle point theorem"; Rabinowitz, 1978).
Nechť

- $X = Y \oplus Z$ *je Banachův prostor,*
- *dim* $Y < \infty$,
- $\varrho \in \mathbb{R}^+$,
- $M = \{u \in Y : \|u\|_X \le \varrho\}$,

- $N = \{u \in Y : \|u\|_X = \varrho\}$,
- $J \in C^1(X, \mathbb{R})$,
- $\inf\limits_{u \in Z} J(u) > \max\limits_{u \in N} J(u)$,
- *J splňuje (PS) podmínku.*

Potom

$$c \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} J(\gamma(u)),$$

kde

$$\Gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \{\gamma \in C(M, X) : \gamma|_N = id\},$$

je kritickou hodnotou funkcionálu J.

Věta 2.6. *Existuje alespoň jedno slabé řešení Dirichletovy úlohy*

$$\begin{cases} -u'' = u + \operatorname{arctg}(u+1) \ v \ (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Důkaz Věty 2.6.

Tentokrát slabá řešení odpovídají stacionárním bodům funkcionálu

$$J : W_0^{1,2}(0, \pi) \to \mathbb{R},$$

$$J(u) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \int_0^\pi (u'(x))^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^\pi (u(x))^2 \, \mathrm{d}x - \int_0^\pi \left(\int_0^{u(x)} \operatorname{arctg}(s+1) \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x.$$

Uvažujme direktní součet

$$W_0^{1,2}(0, \pi) = Y \oplus Z,$$

kde[3]

[3] Uvědomme si, že $\{c \sin x : 0 \neq c \in \mathbb{R}\}$ je množinou všech vlastních funkcí odpovídajících prvnímu vlastnímu číslu

$$\lambda = 1 = \min \left\{ \frac{\int_0^\pi (u')^2 \, \mathrm{d}x}{\int_0^\pi u^2 \, \mathrm{d}x} : u \in W_0^{1,2}(0, \pi) \ \wedge \ \int_0^\pi u^2 \, \mathrm{d}x \neq 0 \right\}$$

úlohy

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \text{ v } (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$Y \stackrel{\text{def.}}{=} \{c \sin x : \ c \in \mathbb{R}\},$$

$$Z \stackrel{\text{def.}}{=} \{u \in W_0^{1,2}(0,\pi) : \ \int_0^\pi u(x) \sin x \, \mathrm{d}x = 0\}.$$

„Saddle point theorem“ zaručuje, že stačí dokázat tato tři tvrzení:

(i) $J(a \sin x) \to -\infty$ pro $a \to +\infty$ i pro $a \to -\infty$,

(ii) funkcionál J je omezený zdola na podprostoru Z,

(iii) funkcionál J splňuje (PS) podmínku.

Ad (i). Pro každé $0 \neq a \in \mathbb{R}$ je

$$J(a \sin x) =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int_0^\pi \cos^2 x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} a^2 \int_0^\pi \sin^2 x \, \mathrm{d}x - \int_0^\pi \left(\int_0^{a \sin x} \operatorname{arctg}(s+1) \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x =$$

$$= - \int_0^\pi \left(\int_0^{a \sin x} \operatorname{arctg}(s+1) \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x = -a \int_0^\pi \left(\frac{\int_0^{a \sin x} \operatorname{arctg}(s+1) \, \mathrm{d}s}{a} \right) \mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

Nyní si všimněme, že

- $\forall x \in \langle 0, \pi \rangle : \ \lim\limits_{a \to \pm\infty} \frac{\int_0^{a \sin x} \operatorname{arctg}(s+1) \, \mathrm{d}s}{a} = \pm \frac{\pi}{2} \sin x,$
- $(\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \, (\forall x \in \langle 0, \pi \rangle) : \ \left| \frac{\int_0^{a \sin x} \operatorname{arctg}(s+1) \, \mathrm{d}s}{a} \right| \leq \frac{\pi}{2},$

a proto z Lebesgueovy věty vyplývá:

$$\lim_{a \to \pm\infty} \int_0^\pi \left(\frac{\int_0^{a \sin x} \operatorname{arctg}(s+1) \, \mathrm{d}s}{a} \right) \mathrm{d}x = \int_0^\pi \pm \frac{\pi}{2} \sin x \, \mathrm{d}x = \pm \pi. \tag{2.13}$$

Dokazované tvrzení je přímým důsledkem vztahů (2.12) a (2.13).

Ad (ii). Je známo (důkaz lze vyhledat například v [10]), že

$$(\exists \lambda > 1) \, (\forall u \in Z) : \ \int_0^\pi \left(u'(x) \right)^2 \mathrm{d}x \geq \lambda \int_0^\pi u^2(x) \, \mathrm{d}x,$$

a proto pro každé $u \in Z$ platí:

$$J(u) = \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^\pi u^2(x)\,\mathrm{d}x\right] - \int_0^\pi \left(\int_0^{u(x)} \operatorname{arctg}(s+1)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi (u'(x))^2\,\mathrm{d}x\right] - \int_0^\pi \frac{\pi}{2}|u(x)|\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\|u\|^2\underbrace{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}_{>0} - \frac{\pi}{2}\|u\|_{L^1(0,\pi)} \geq \frac{1}{2}\|u\|^2\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}c\|u\|$$

pro nějaké (na u nezávislé) $c > 0$ – viz vnoření (2.4). Odtud již snadno plyne dokazovaná omezenost zdola funkcionálu J na Z.

Ad (iii). Nejdříve ukažme, že každá posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(0,\pi)$ taková, že

$$\begin{aligned} &(J(u_n)) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R}, \\ &J'(u_n) \to 0 \quad \text{ve } \left(W_0^{1,2}(0,\pi)\right)^*, \end{aligned} \tag{2.14}$$

je omezená.

Předpokládejme sporem, že

$$\|u_n\| \to \infty, \tag{2.15}$$

a definujme

$$v_n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{u_n}{\|u_n\|}. \tag{2.16}$$

Protože prostor $W_0^{1,2}(0,\pi)$ je reflexivní a je kompaktně vnořen do $C(\langle 0,\pi\rangle)$, existují posloupnost vybraná z posloupnosti (v_n) (značme ji stejně) a nějaké $v \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ tak, že

$$\begin{aligned} &v_n \rightharpoonup v \text{ ve } W_0^{1,2}(0,\pi), \\ &v_n \to v \text{ v } C(\langle 0,\pi\rangle). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ze vztahů (2.14)–(2.16) plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2J(u_n)}{\|u_n\|^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^\pi (v_n'(x))^2\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi v_n^2(x)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^\pi \frac{2\int_0^{u_n(x)} \operatorname{arctg}(s+1)\,\mathrm{d}s}{\|u_n\|^2}\,\mathrm{d}x}_{\to 0}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^\pi (v_n'(x))^2\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi v_n^2(x)\,\mathrm{d}x\right] = 0.$$

Odtud, z (2.17), z variační charakteristiky prvního vlastního čísla úlohy (2.11) a z faktu, že norma je slabě zdola polospojitý funkcionál, vyplývá, že

$$\int_0^\pi v^2\,\mathrm{d}x \le \int_0^\pi (v')^2\,\mathrm{d}x \le \liminf \int_0^\pi (v_n')^2\,\mathrm{d}x = \lim \int_0^\pi (v_n')^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi v^2\,\mathrm{d}x, \tag{2.18}$$

a proto (v (2.18) musí platit rovnosti!)

$$1 = \|v_n\| \to \|v\|.$$

Tato konvergence, uniformní konvexita prostoru $W_0^{1,2}(0,\pi)$ a vztahy (2.17) a (2.18) implikují, že

$$v_n \to v \text{ ve } W_0^{1,2}(0,\pi)$$

a že

$$v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x \quad \text{nebo} \quad v = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x.$$

Předpokládejme v dalším, že

$$v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$$

(úplnost důkazu tím určitě nebude narušena, protože v případě $v = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$ lze postupovat zcela analogicky). Pak z (2.14), (2.15) a (2.17) vyplývá, že

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\langle J'(u_n), u_n\rangle - 2J(u_n)}{\|u_n\|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^\pi \frac{2\int_0^{u_n(x)} \operatorname{arctg}(s+1)\,\mathrm{d}s - \operatorname{arctg}(u_n(x)+1)u_n(x)}{\|u_n\|}\,\mathrm{d}x \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_{\substack{x\in(0,\pi)\\ u_n(x)\neq 0}} \left[\frac{2\int_0^{u_n(x)} \operatorname{arctg}(s+1)\,\mathrm{d}s}{u_n(x)} - \operatorname{arctg}(u_n(x)+1) \right] \frac{u_n(x)}{\|u_n\|}\,\mathrm{d}x \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi v(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} > 0,$$

a to je spor.

Posloupnost (u_n) charakterizovaná vztahy (2.14) je tedy již nutně omezená, a můžeme proto (po přechodu k vybrané posloupnosti) předpokládat, že existuje $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ takové, že

$$u_n \rightharpoonup u \text{ ve } W_0^{1,2}(0,\pi),$$

$$u_n \to u \text{ v } C(\langle 0,\pi\rangle).$$

Z předpokladu (2.14) pak vyplývá:

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'(u_n), u_n - u \rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^\pi u_n'(u_n - u)' \, \mathrm{d}x - \int_0^\pi u_n(u_n - u) \, \mathrm{d}x - \int_0^\pi \operatorname{arctg}(u_n + 1)(u_n - u) \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^\pi u_n'(u_n - u)' \, \mathrm{d}x \right] = 0.$$

Odtud získáme:

$$\|u_n - u\|^2 = \int_0^\pi (u_n - u)'(u_n - u)' \, \mathrm{d}x = \int_0^\pi u_n'(u_n - u)' \, \mathrm{d}x - \int_0^\pi u'(u_n - u)' \, \mathrm{d}x \to 0,$$

a proto $u_n \to u$.

□

2.4. Věta o řetízkujících množinách.

Věta 2.7 („Linking theorem“; Rabinowitz, 1978).
Nechť

- $X = Y \oplus Z$ *je Banachův prostor,*
- *dim* $Y < \infty$,
- $0 < r < \varrho$,
- $z \in Z: \ \|z\|_X = r$,
- $M \overset{\text{def.}}{=} \{u = y + sz: \ y \in Y, \ \|u\|_X \le \varrho, \ s \ge 0\}$,
- $M_0 \overset{\text{def.}}{=} \{u = y + sz: \ \big(y \in Y, \ \|u\|_X = \varrho, \ s \ge 0\big) \vee \big(y \in Y, \ \|u\|_X \le \varrho, \ s = 0\big)\}$,
- $N \overset{\text{def.}}{=} \{u \in Z: \ \|u\|_X = r\}$,
- $J \in C^1(X, \mathbb{R})$,
- $b \overset{\text{def.}}{=} \inf\limits_{u\in N} J(u) > \max\limits_{u \in M_0} J(u)$,
- J *splňuje Palaisovu–Smaleovu podmínku.*

Potom

$$c \overset{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in M} J(\gamma(u)),$$

kde

$$\Gamma \overset{\text{def.}}{=} \{\gamma \in C(M, X): \ \gamma|_{M_0} = id\},$$

je kritickou hodnotou funkcionálu J a platí $c \geq b$.

(Podstatným „geometrickým předpokladem" uvedené věty je vzájemná poloha množin M_0 a N, která připomíná dva spojené články řetězu. Anglicky se říká, že M_0 a N jsou „`link`".)

Nyní (jak jsme si slíbili) ukažme, jak lze výše uvedenou větu využít při důkazu existence slabého řešení jisté okrajové úlohy.

Věta 2.8. *Problém*

$$\begin{cases} -\Delta u + au = |u|^{p-2}u & v\ \Omega, \\ u = 0 & na\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

kde

- $N \geq 3$,
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí,*
- $2 < p < 2^* \overset{\text{def.}}{=} \frac{2N}{N-2}$,
- $a \in \mathbb{R}$,

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ alespoň jedno `netriviální` *slabé řešení.*

Důkaz Věty 2.8.
Uvažujme Hilbertův prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ s normou

$$\|u\| \overset{\text{def.}}{=} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

a připomeňme si, že slabá řešení úlohy (2.19) odpovídají stacionárním bodům funkcionálu $J \in C^1\left(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R}\right)$:

$$J(u) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{a}{2} \int_\Omega u^2 \, dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx$$

s derivací

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx + a \int_\Omega u\varphi \, dx - \int_\Omega |u|^{p-2} u\varphi \, dx.$$

(Poznamenejme zde, že za našich předpokladů platí:

$$\sup_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u) = - \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u) = \infty;$$

funkcionál J proto nemá globální extrém.)

Všimněme si, že pro triviální řešení $u \stackrel{\text{def.}}{=} 0$ platí: $J(u) = J(0) = 0$. Stačí tedy ukázat – a to uděláme pomocí Věty 2.7 –, že existuje **kladná** kritická hodnota funkcionálu J.

Nejdříve ukažme, jak zvolíme rozklad $W_0^{1,2}(\Omega) = Y \oplus Z$. Označme

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \dots ,$$

kde

$$\lambda_n \leq 0 < \lambda_{n+1},$$

posloupnost (všech) vlastních čísel problému

$$\begin{cases} -\Delta u + au = \lambda u \ \text{ v } \ \Omega, \\ \quad u = 0 \ \text{ na } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

(každé vlastní číslo se v posloupnosti opakuje tolikrát, kolik činí jeho násobnost) a buď

$$e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots$$

odpovídající (v $L^2(\Omega)$ ortonormální) posloupnost vlastních funkcí. Nyní přistupme k definici podprostorů Y a Z:

$$Y \stackrel{\text{def.}}{=} \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\},$$

$$Z \stackrel{\text{def.}}{=} \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x = 0 \text{ pro každé } v \in Y\}.$$

(Jsou-li všechna vlastní čísla problému (2.20) kladná, tj. je-li

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots ,$$

volíme:

$$Y \stackrel{\text{def.}}{=} \{0\}, \ Z \stackrel{\text{def.}}{=} W_0^{1,2}(\Omega).$$

V tomto případě vlastně „Linking Theorem“ splývá s „Mountain Pass Theorem“.)

Zbývající část důkazu (tj. určení konstant $r, \varrho \in \mathbb{R}$ a prvku $z \in Z$ a ověření předpokladů Věty 2.7 (s $b > 0$!) rozdělíme do tří lemmat:

Lemma 1.

$$\exists r > 0 : \inf_{\substack{u \in Z \\ \|u\| = r}} J(u) > 0. \tag{2.21}$$

Lemma 2. *Buď $r > 0$ takové, že*

$$b \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{u \in N} J(u) > 0,$$

a buď

$$z \stackrel{\text{def.}}{=} r\frac{e_{n+1}}{\|e_{n+1}\|}.$$

Pak

$$\exists \varrho > r : \max_{u \in M_0} J(u) \leq 0. \tag{2.22}$$

(Definice množin N a M_0 je stejná jako ve Větě 2.7).

Lemma 3. Funkcionál J splňuje Palaisovu–Smaleovu podmínku.

`Důkaz Lemmatu 1.`

Nejdříve dokažme, že

$$\delta \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\substack{u \in Z \\ \|u\|=1}} \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + a \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x\right] > 0. \tag{2.23}$$

Buď (u_n) příslušná minimizující posloupnost, tj. (u_n) buď posloupnost v Z taková, že

$$\|u_n\| = 1, \quad \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x + a \int_\Omega u_n^2 \, \mathrm{d}x \to \delta.$$

Protože $W_0^{1,2}(\Omega)$ je Hilbertův (a tedy reflexivní!) prostor, lze předpokládat (přechodem k vybrané posloupnosti), že existuje $u \in Z$ takové, že $u_n \rightharpoonup u$. Odtud, protože $W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, plyne, že

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x + a \int_\Omega u_n^2 \, \mathrm{d}x = 1 + a \int_\Omega u_n^2 \, \mathrm{d}x \to 1 + a \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x = \delta \tag{2.24}$$

a že

$$\delta \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + a \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \geq \lambda_{n+1} \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \tag{2.25}$$

(první nerovnost plyne z faktu, že norma je slabě zdola polospojitý funkcionál, druhá z definice podprostoru Z). Nyní již důkaz nerovnosti (2.23) snadno dokončíme:

- je-li $u \equiv 0$, je $\delta = 1 > 0$ (viz (2.24)),
- je-li $u \not\equiv 0$, je $\delta \geq \lambda_{n+1} \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x > 0$ (viz (2.25)).

A teď se vraťme k dokazovanému tvrzení (2.21). Protože z Rellichovy věty o vnoření (viz [43]) vyplývá, že

$$W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega), \tag{2.26}$$

existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $u \in Z \setminus \{0\}$ platí:

$$J(u) = \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x\right)\frac{\|u\|^2}{\|u\|^2} - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2\delta - c\|u\|^p = \|u\|^2\left(\frac{1}{2}\delta - c\|u\|^{p-2}\right).$$

A stačí volit $r > 0$ tak malé, aby

$$\frac{1}{2}\delta - cr^{p-2} > 0.$$

□

`Důkaz Lemmatu 2.`

Nejdříve si všimněme, že pro každé $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ je

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}a\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)},$$

a proto (v prostoru konečné dimenze jsou všechny normy ekvivalentní a $p > 2$):

$$\lim_{\substack{\|u\|\to\infty \\ u\in Y+\mathbb{R}z}} J(u) = -\infty$$

$$(Y + \mathbb{R}z \overset{\text{def.}}{=} \{y + sz:\ y \in Y, s \in \mathbb{R}\}).$$

Dokazované tvrzení (2.22) plyne přímo z tohoto pozorování a skutečnosti, že z definice podprostoru Y vyplývá:

$$\forall u \in Y:\ J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\lambda_n \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x \leq 0.$$

□

`Důkaz Lemmatu 3.`

Předpokládejme, že pro posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ platí:

$$(J(u_n)) \text{ je omezená a } J'(u_n) \to 0. \tag{2.27}$$

Máme dokázat, že z posloupnosti (u_n) lze vybrat posloupnost konvergentní.

Zvolme $q \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$2 < q < p.$$

Pak z (2.26) vyplývá, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že

$$c + \|u_n\| \geq qJ(u_n) - \langle J'(u_n), u_n \rangle =$$

$$= \frac{q}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{aq}{2}\int_\Omega u_n^2 \,\mathrm{d}x - \frac{q}{p}\int_\Omega |u_n|^p \,\mathrm{d}x -$$

$$-\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x - a\int_\Omega u_n^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_n|^p \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{q}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 + \underbrace{\int_\Omega \left(1 - \frac{q}{p}\right)|u_n|^p + \left(\frac{aq}{2} - a\right)u_n^2}_{\to\infty \text{ pro } |u_n|\to\infty} \,\mathrm{d}x \geq \left(\frac{q}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 - k,$$

pro nějaké (na (u_n)) nezávislé) $k \in \mathbb{R}$, a proto je posloupnost (u_n) omezená.

Protože $W_0^{1,2}(\Omega)$ je reflexivní Banachův prostor, existuje $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) taková, že $u_n \rightharpoonup u$.

Navíc, protože $J'(u_n) \to 0$, platí:

$$\langle J'(u_n), u_n - u \rangle =$$

$$= \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u) \,\mathrm{d}x + a\int_\Omega u_n(u_n - u) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n(u_n - u) \,\mathrm{d}x \to 0. \tag{2.28}$$

Všimněme si, že:

- $|\int_\Omega u_n(u_n - u) \,\mathrm{d}x| \leq \|u_n\|_{L^2(\Omega)}\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0$,

  $|\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n(u_n - u) \,\mathrm{d}x| \leq \|u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \cdot \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$,

  protože díky $u_n \rightharpoonup u$ a kompaktnímu vnoření (2.26) platí, že $u_n \to u$ v $L^2(\Omega)$ i v $L^p(\Omega)$;
- zobrazení $\varphi \mapsto \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x \in \left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)^*$

  $(|\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \,\mathrm{d}x| \leq \|u\|\|\varphi\|)$, a proto $\int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u) \,\mathrm{d}x \to 0$.

Z těchto pozorování a ze vztahu (2.28) snadno zjistíme, že

$$\|u_n - u\|^2 = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u) \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u) \,\mathrm{d}x \to 0,$$

a proto

$$u_n \to u.$$

To jsme si přáli dokázat.

□