Zadání projektů

Projekt 1

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \frac{-9x^3 - 5}{x^2}.$$
2. Určete souřadnice vrcholů obdélníka $ABCD$, jehož dva vrcholy mají kladnou y-ovou souřadnici a leží na parabole dané rovnicí $y = 16 - x^2$ a další dva vrcholy leží na ose x, chceme-li, aby obvod obdélníka byl maximální.

Projekt 2

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{4}}.$$
2. Do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně a vepište rovnoramenný trojúhelník DEF, jehož obsah bude maximální. Přitom žádáme, aby vrchol proti základně vepsaného trojúhelníku ležel ve středu jedné ze stran trojúhelníku ABC.

Projekt 3

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = -\frac{\ln(x^2)}{x^2}.$$
2. Do elipsy dané rovnicí $4x^2 + 9y^2 = 36$ vepište obdélník tak, aby měl strany rovnoběžné s osami x a y a zároveň byl jeho obsah maximální. Určete rozměry takového obdélníku.

Projekt 4

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \frac{3x^2}{x - 1}.$$
2. Účetní v dílně vyrábějící hliněné kuličky přišel na to, že celkové náklady na výrobu při produkci x tisíců kuliček za hodinu lze vyjádřit jako funkci $f(x) = 3x^4 + 5x^3$ a podobně výnosy při stejné produkci odpovídají funkci $g(x) = 9x^3 + 36x^2$. Při jaké rychlosti výroby bude mít dílna největší zisk?

Projekt 5

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. Nový typ unimo (stavebních) buněk bude mít nosnou konstrukci tvořenou hranami kvádru a rozměry podlahy v poměru 3:4. Celou konstrukci je nutno vyrobit z L - profilů o celkové délce 44 m. Jaké rozměry musí mít nosná konstrukce, aby byl vnitřní objem unimo buňky co největší?

Projekt 6

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{10x + 10}{x^2}.$$

2. Z papíru tvaru čtverce 40×40 cm vystřihneme ve všech rozích stejné čtverečky a složíme krabičku (bez víka). Jaká musí být strana vystřihnutého čtverečku, aby měla krabička maximální objem?

Projekt 7

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \cos^2 x + \cos x.$$

2. Určete rozměry válcové nádoby bez víka tak, aby při objemu 2 litry měla tato nádoba minimální povrch.

Projekt 8

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+2}.$$

2. Do ostroúhlého trojúhelníku ABC, $c = 8$ cm, $v_c = 4$ cm, vepište obdélník $KLMN$ maximálního obsahu tak, aby úsečka KL byla částí úsečky AB. Určete rozměry takového obdélníku.

Projekt 9

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

2. Hodláme koupit obdélníkovou parcelu o rozloze 200 m^2, jejíž jedna strana bude ohraničená zdí, zatímco zbývající tři strany je nutno oplotit. Zvolte rozměry parcely tak, aby měl plot minimální délku.

Projekt 10

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}.$$

2. Do půlkružnice k s průměrem AB vepište trojúhelník ABC tak, že vrchol $C \in k$. Umíte najít trojúhelník ABC tak, aby jeho obsah resp. obvod byl maximální? Pokud ano, určete jaký obsah resp. obvod bude mít.

Projekt 11

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x.$$

2. Je některý bod B ležící na parabole $y = x^2, z = 0$ v trojrozměrném prostoru nejblíže bodu $A = [1, 2, 2]$? Pokud ano, zjistěte vzdálenost bodů A a B.

Projekt 12

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}.$$

2. Z ubrusu, který má tvar elipsy s poloosami $70\,cm$ a $30\,cm$, chceme vystřihnout obdélníkový ubrus s maximální plochou (obsahem). Jaké budou rozměry obdélníkového ubrusu?

Projekt 13

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+2}.$$
2. Jaké jsou rozměry válce vepsaného do koule s poloměrem R, víme-li, že tento válec má maximální objem?

Projekt 14

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \ln(1-x^2).$$
2. Na zahradě chcete vybudovat pravoúhlý bazén se čtvercovým dnem a objemem $108\,m^3$. Jaké mají být rozměry tohoto bazénu, má-li se při vydláždění dna a stěn spotřebovat co nejméně dlaždiček?

Projekt 15

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$
2. Na hyperbole $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ nalezněte bod B, který je nejblíže bodu $A = (3, 0)$.

Projekt 16

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \arccos \frac{1}{x}.$$
2. Který válec vepsaný do rotačního kužele s poloměrem podstavy R a výškou v má největší objem V?

Projekt 17

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \frac{2-x}{(x-3)^2}.$$
2. Určete rozměry obdélníka vepsaného do půlkruhu o poloměru $R > 0$ majícího maximální obsah.

Projekt 18

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = x + \sin(2x).$$
2. Kvádr má povrch S a délka hrany c je dvojnásobkem délky hrany a. Určete délky hran kvádru tak, aby jeho objem V byl maximální.

Projekt 19

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \frac{2x^2 - 4}{3 + x}.$$
2. Určete rozměry obdélníku vepsaného do elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$ tak, aby jeho strany byly rovnoběžné s osami x a y a zároveň byl jeho obsah maximální.

Projekt 20

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$
2. Letadlo **A** a letadlo **B** se pohybují po vzájemně kolmých drahách. V určitém okamžiku je od průniku jejich drah letadlo **A** vzdálené 2300 km a letadlo **B** 2000 km. Určete minimální vzdálenost obou letadel, jestliže se letadlo **A** pohybuje rychlostí 950 km/h a letadlo **B** 850 km/h.

Projekt 21

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem
$$f(x) = \ln(1 - x^3).$$
2. Mějme parabolu zadanou rovnicí $y = x^2 - 2$. Určete body paraboly s nejmenší vzdáleností od bodu $B = [0, 2]$.

Projekt 22

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

2. Určete maximální obsah pravoúhlého trojúhelníku ležícího ve druhém kvadrantu, jehož odvěsny leží na osách souřadnic a přepona je částí tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2 + 4x + 4$.

Projekt 23

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{3}{2}x \ln x^2.$$

2. Na výrobu plechovky ve tvaru válce bylo použito 54π cm^2 plechu. Určete její poloměr základny r a výšku v tak, aby její objem byl co největší.

Projekt 24

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

2. Určete rozměry x a y co největšího obdélníkového pozemku, víte-li že:

   a) na oplocení máte 12 m^2 pletiva,

   b) na severní straně již je oplocena část pozemku dlouhá 3 m,

   c) na východní straně již je oplocena část pozemku dlouhá 1 m.

Projekt 25

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

2. Rozložte číslo 3 na součet dvou kladných čísel tak, aby součin jejich převrácených hodnot byl co nejmenší.

Projekt 26

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{1}{x}\sqrt[3]{2x^2 - x^3}.$$

2. Dolní okraj obrazu je a metrů nad výškou oka pozorovatele, jeho horní okraj je b metrů nad výškou oka pozorovatele. Z jaké vzdálenosti od stěny vidí pozorovatel obraz v maximálním zorném úhlu?

Projekt 27

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

2. Na kružnici $x^2+y^2 = a^2$ najděte bod, pro který je nejmenší součet čtverců vzdáleností od bodů $[2a, 0]$ a $[0, a\sqrt{5}]$.

Projekt 28

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = x^3 + x^2 + |x| + 1.$$

2. Finanční ztráta f v důsledku údržby a ztrát elektrické energie v elektrickém vedení závisí na jeho příčném průřezu S a je dána vztahem

$$f(S) = k_1 S + \frac{k_2}{S},$$

kde k_1, k_2 jsou kladné reálné konstanty. Určete průřez S (v závislosti na k_1 a k_2) tak, aby finanční ztráta byla co nejmenší.

Projekt 29

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + |x+1| + 3.$$

2. Od světelného bodu A se ve vzdálenosti a ($a > 0$) nachází střed S koule o poloměru r, kde $0 < r < a$. Určete tento poloměr r (v závislosti na a) tak, aby z bodu A osvětlený kulový vrchlík měl co největší obsah.

Projekt 30

1. Vyšetřete průběh funkce f dané předpisem

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + |x - 1| + 1.$$

2. Nádoba se skládá z válce výšky 2 dm, který je nahoře ukončen kuželem o stejném poloměru podstavy r a o délce strany 6 dm (stranou kužele přitom rozumíme vzdálenost mezi vrcholem a podstavou podél pláště). Určete výšku v kužele a poloměr r tak, aby nádoba měla maximální objem.