ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
METODY OPTIMALIZACE

Čas na práci: 75 minut

Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zadaná předpisem

$$f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 10\left(x_2 - x_1^2\right)^2 .$$

1. a) Vypočtěte gradient a Hessián v bodě $[0, 1]$ pro uvedenou funkci a sestrojte Taylorův polynom 2. řádu této funkce v bodě $[0, 1]$.

1. b) Napište základní algoritmus Newtonovy metody pro minimalizaci funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a proveďte 1 iteraci tohoto algoritmu pro minimalizaci uvedené funkce. Počáteční iteraci zvolte $[x_0, y_0]^T = [0, 1]^T$.

1. c) Je zaručeno, že při použití základní verze Newtonovy metody pro tuto funkci dochází k poklesu funkční hodnoty v iteraci provedené v bodě $[0, 1]$? Pokud ne, modifikujte vámi vypočtený Hessián tak, aby jeho modifikace tento pokles zaručila. Při modifikaci se snažte, co „nejlépe“ zachovat strukturu původního Hessiánu.

1. d) Proveďte 1 iteraci Newtonovy metody pro minimalizaci uvedené funkce s Hessiánem modifikovaným v úkolu 1 c). Počáteční iteraci zvolte $[x_0, y_0]^T = [0, 1]^T$.

(20 bodů)

2. Rozhodněte, zda jsou v bodě $[1, 1, 0]$ splněny Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky pro úlohu

$$\min_{(x,y,z)\in\Omega} x^2 + y^2 + z^4, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2\}.$$

(10 bodů)

3. Rozhodněte, zda jsou v bodě $[0, 2]$ splněny Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky pro úlohu

$$\min_{(x,y)\in\Omega} x^2 + 2y^2, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2, \quad x + y \leq 2\}.$$

(10 bodů)