ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 1.1A

Čas na práci: 100 minut
Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & & +6x_3 & +x_4 & = & 7 \\ x_1 & +2x_2 & +7x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & 3x_2 & +6x_3 & +x_4 & = & 6 \\ & 2x_2 & +4x_3 & & = & 3 \end{array}$$

2. Najděte LU rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -10 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

3. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisy:

$$\mathcal{A}([0;-2;-1]) = [1;-1], \quad \mathcal{A}([1;1;1]) = [1;-2], \quad \mathcal{A}([3;2;2]) = [3;-5]$$

Určete nulový prostor (jádro) zobrazení $\mathcal{A}$.

4. Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Najděte vlastní čísla a příslušné vlastní vektory matice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Uveďte definici vektorového podprostoru $\mathcal{U}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$

7. Určete a zdůvodněte, zda-li zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\mathcal{A}([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_2 + 1]$$

je lineární.

ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 2.1A

Čas na práci: 100 minut
Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & & +2x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & +2x_2 & & -4x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +9x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +6x_4 & = & 0 \end{array}$$

2. Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to P_3$ ($P_3 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) definované předpisy:

$$\mathcal{A}([0; 2; -1]) = 2x^2 + x + 2, \ \mathcal{A}([-1; 1; 1]) = 2x^2 + 1, \ \mathcal{A}([1; -2; 0]) = -x^2 - x - 1$$

Určete množinu vzorů $2x^2 - 3x - 1$.

4. Buď $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bilineární forma definovaná předpisem

$$B(x, y) = x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_3 + 2x_3y_2 + x_3y_3.$$

Najděte matici zadané bilineární formy vzhledem k bázi

$$e_1 = [1, 0, 0], e_2 = [0, 1, 0], e_3 = [0, 0, 1].$$

5. Najděte všechna vlastní čísla matice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Uveďte definici lineárního obalu.

7. Určete a zdůvodněte, zda-li množina $\mathcal{V} = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ (operace sčítaní a násobení skalárem jsou definovány standardním způsobem).

ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 3.1A

Čas na práci: 100 minut
Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & +6x_2 & +x_3 & -5x_4 & = & -8 \\ & 2x_2 & +x_3 & & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 4 \end{array}$$

2. Rozhodněte, zda je polynom $p(x) = x^2 - 3x + 2$ lineární kombinací polynomů

$$q(x) = 2x^2 + x, \quad r(x) = -2x^2 - 2x + 1, \quad s(x) = x^2 + x - 1.$$

Pokud ano, najděte koeficienty této lineární kombinace.

3. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : P_3 \to \mathbb{R}^2$ ($P_3 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) definované předpisy:

$$\mathcal{A}\left(2x^2 + x\right) = [1; -1], \quad \mathcal{A}\left(-2x^2 - 1\right) = [-1; 2], \quad \mathcal{A}\left(x^2 - x + 1\right) = [2; -1]$$

Určete množinu vzorů $[5; -4]$.

4. Buď $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilineární forma definovaná předpisem

$$B(x, y) = -x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

Najděte její symetrickou a antisymetrickou část. Najděte matici zadané bilineární formy vzhledem k bázi

$$e_1 = [1, 0], e_2 = [-1, 1].$$

5. Buď Q matice kvadratické formy v $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardní bázi. Klasifikujte tuto formu.

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Uveďte definici vektorového podprostoru $\mathcal{U}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$

7. Určete a zdůvodněte, zda-li množina $\mathcal{V} = \left\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0 \wedge x_1 + x_2 = 2\right\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ (operace sčítaní a násobení skalárem jsou definovány standardním způsobem).

ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 4.1A

Čas na práci: 100 minut
Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic
$$\begin{array}{rrrrcl} -2x_1 & +x_2 & -5x_3 & -11x_4 & = & 8 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +x_2 & -2x_3 & -5x_4 & = & 4 \end{array}$$

2. Najděte LU rozklad matice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to P_2$ ($P_2 = \{p(x) = a_1x + a_0 \colon a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) definované předpisy:
$$\mathcal{A}([2; 2; -1]) = x + 1, \quad \mathcal{A}([-1; -1; 1]) = 3x + 2, \quad \mathcal{A}([-5; -4; 2]) = 4x + 3$$
Určete $\mathcal{A}([11; 8; -3])$.

4. Vypočtěte determinant matice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Pomocí Geršgorinovy věty určete co nejmenší část komplexní roviny, ve které se nachází všechna vlastní čísla matice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
Zakreslete v komplexní rovině.

6. Uveďte definici lineárního zobrazení.

7. Určete a zdůvodněte, zda-li zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definované předpisem
$$\mathcal{A}([x_1, x_2]) = [x_2, x_1^2]$$
je lineární.

ZADÁNÍ ZKOUŠKOVÉ PÍSEMNÉ PRÁCE Z PŘEDMĚTU
LINEÁRNÍ ALGEBRA

Verze 5.1A

Čas na práci: 100 minut
Za každý úkol můžete získat maximálně 10 bodů. Řešení každého příkladu zapisujte čitelně a srozumitelně, výpočty a úvahy podrobně zapište. Řešení jednotlivých příkladů od sebe zřetelně oddělte. Při hodnocení nebude přihlíženo k přeškrtnutým zápiskům.

1. Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +5x_4 & = & 7 \\ -3x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & 2 \\ -3x_1 & +4x_2 & -3x_3 & +10x_4 & = & 13 \\ -2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 3 \end{array}$$

2. Rozhodněte, zda je vektor $v = [-3, -8, 6]$ lineární kombinací vektorů

$$u_1 = [2, -1, 0], u_2 = [0, -2, 1], u_3 = [-1, -1, 1].$$

Pokud ano, najděte koeficienty této lineární kombinace.

3. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{A} : P_3 \to P_3$ ($P_3 = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$, definované předpisy:

$$\mathcal{A}\left(2x^2 - x - 2\right) = -2x^2 + 2x - 1, \;\; \mathcal{A}\left(2x^2 - 1\right) = x^2 - 3x + 1, \;\; \mathcal{A}\left(-x^2 + x + 1\right) = 3x^2 - 4x + 2$$

Určete $\mathcal{A}\left(4x^2 - x - 2\right)$.

4. Vypočtěte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Buď Q matice kvadratické formy v $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardní bázi. Klasifikujte tuto formu.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & -5 \\ 5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

6. Uveďte definici dimenze vektorového prostoru.

7. Určete a zdůvodněte, zda-li množina $\mathcal{V} = \{[1, 2, 3]\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ (operace sčítaní a násobení skalárem jsou definovány standardním způsobem).