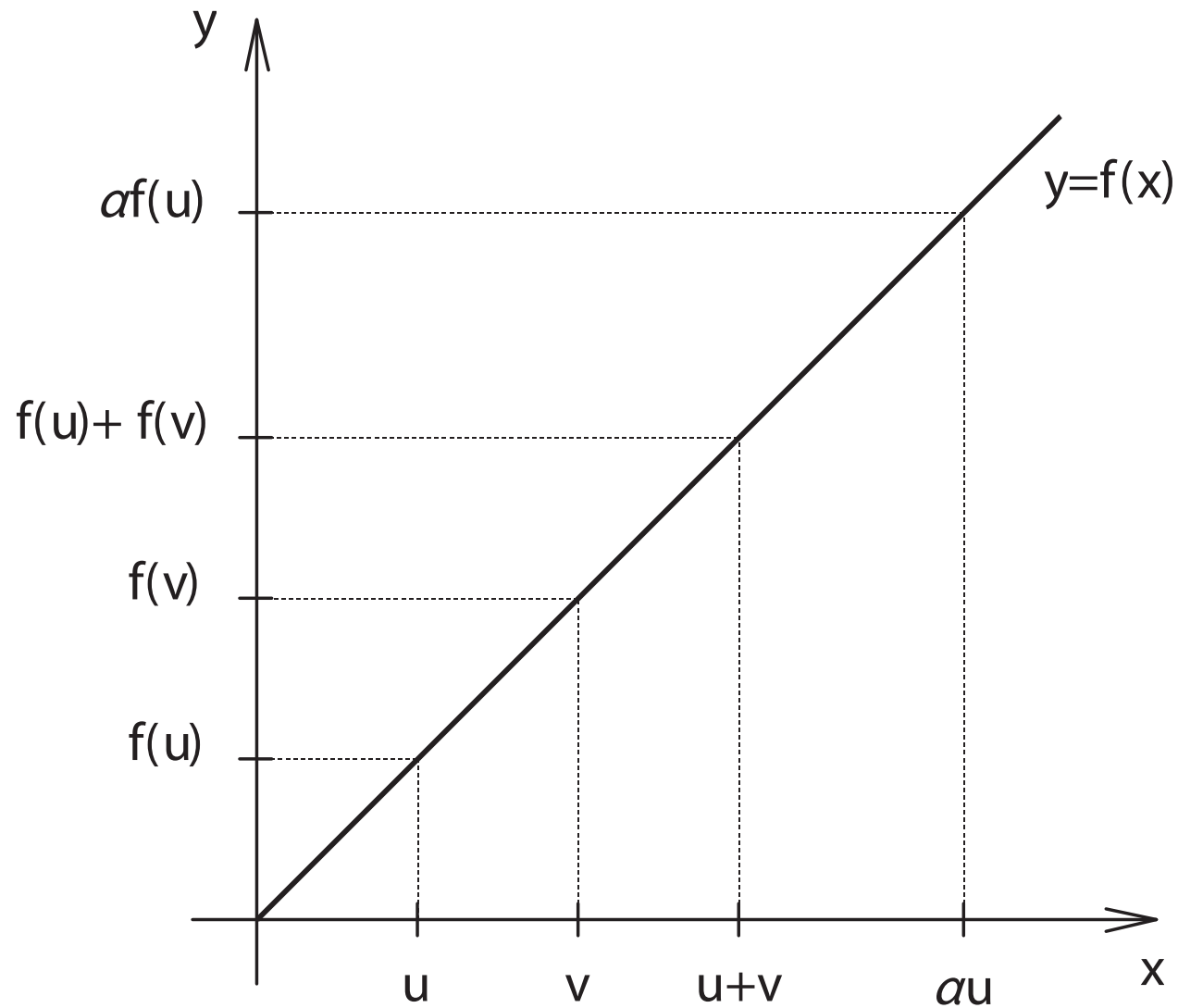

8. Lineární zobrazení

Lineární zobrazení

1. Definice a příklady
2. Elementární vlastnosti lineárního zobrazení
3. Nulový prostor a obor hodnot
4. Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení
5. Matice lineárního zobrazení
6. Změna báze
7. Podobnost matic

8.1 Definice a příklady



8.1 Definice a příklady

DEFINICE 1

Nechť \mathcal{U}, \mathcal{V} jsou vektorové prostory. Zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ se nazývá *lineární zobrazení (operátor)*, jestliže pro každé dva vektory $u, v \in \mathcal{U}$ a skalár α platí:

1. $A(u + v) = A(u) + A(v)$
2. $A(\alpha u) = \alpha A(u)$

Lineární zobrazení $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ se často nazývá *lineární transformace*. Množinu všech lineárních zobrazení vektorového prostoru \mathcal{U} do vektorového prostoru \mathcal{V} budeme značit $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Místo $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ budeme psát stručně $\mathcal{L}(\mathcal{U})$. Lineární zobrazení vektorového prostoru \mathcal{U} do \mathbb{R} se nazývají *lineární formy* nebo *lineární funkcionály*.

8.1 Definice a příklady

PŘÍKLAD 1 Funkce $y = ax$ je lineární transformace \mathbb{R} pro libovolné pevně zvolené $a \in \mathbb{R}$, neboť

$$a(u + v) = au + av \quad \text{a} \quad a(\alpha u) = \alpha au$$

pro libovolná čísla u, v a α .

PŘÍKLAD 2 Funkce $f : y = 2x + 1$ není lineární transformace \mathbb{R} , neboť $f(2 + 2) = f(4) = 9 \neq 10 = f(2) + f(2)$.

PŘÍKLAD 3 Je-li \mathbf{A} libovolná reálná $m \times n$ matice, $\mathbb{R}^{n,1}(\mathbb{R}^{m,1})$ prostor všech sloupcových aritmetických vektorů dimenze $n(m)$, pak je

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^{n,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

lineární zobrazení, neboť pro libovolné vektory \mathbf{x} a \mathbf{y} platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \mathbf{Ax}.$$

8.2 Elementární vlastnosti lineárního zobrazení

VĚTA 1

Nechť \mathcal{U}, \mathcal{V} jsou vektorové prostory. Pro libovolné lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ a $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ platí

1. $A(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$
2. $A(-\mathbf{v}) = -A(\mathbf{v})$

DŮKAZ:

1. $A(\mathbf{o}) = A(0 \cdot \mathbf{o}) = 0 \cdot A(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$
2. $A(-\mathbf{v}) = A((-1) \cdot \mathbf{v}) = (-1) \cdot A(\mathbf{v}) = -A(\mathbf{v})$

8.2 Elementární vlastnosti lineárního zobrazení

VĚTA 2

Jestliže $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, pak pro libovolné skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ prostoru \mathcal{U} platí

$$A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_n A(\mathbf{v}_n).$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) &= A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + (\alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n)) = \\ &= A(\alpha_1 \mathbf{v}_1) + A(\alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \\ &= \alpha_1 A(\mathbf{v}_1) + A(\alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \dots = \\ &= \alpha_1 A(\mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_n A(\mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

Všechna lineární zobrazení definovaná na prostorech konečné dimenze jsou úplně určena obrazy vektorů libovolné báze, tedy obrazy konečného počtu vektorů.

8.2 Elementární vlastnosti lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 4 Zobrazení $D : \mathcal{P}_{n+1} \mapsto \mathcal{P}_n$ definované předpisem

$$D : p(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mapsto p'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

je lineární.

Opravdu pro $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ a $q(x) = b_n x^n + \dots + b_0$ je

$$(p + q)(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_0 + b_0),$$

$$(\alpha p)(x) = (\alpha a_n)x^n + \dots + (\alpha a_0) \text{ a}$$

$$1. D(p + q) = n(a_n + b_n)x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) =$$

$$= n a_n x^{n-1} + \dots + a_1 + n b_n x^{n-1} + \dots + b_1 =$$

$$= p'(x) + q'(x) = D(p) + D(q)$$

$$2. D(\alpha p) = n(\alpha a_n)x^{n-1} + \dots + (\alpha a_1) = \alpha(n a_n x^{n-1} + \dots + a_1) =$$

$$= \alpha p'(x) = \alpha D(p).$$

8.3 Nulový prostor a obor hodnot

DEFINICE 2

Nechť \mathcal{U}, \mathcal{V} jsou vektorové prostory a nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak *nulový prostor (jádro)* $\mathcal{N}(A)$ zobrazení A je množina vektorů \mathbf{o} , t.j.

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} : A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}.$$

VĚTA 3

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak $\mathcal{N}(A)$ je podprostorem \mathcal{U} .

DŮKAZ: Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{N}(A)$, t.j. $A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, $A(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, a je-li α libovolný skalár, pak platí

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \text{ a } A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u}) = \mathbf{o}.$$

8.3 Nulový prostor a obor hodnot

DEFINICE 3

Nechť \mathcal{U} , \mathcal{V} jsou vektorové prostory a nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak *oborem hodnot* $\mathcal{H}(A)$ zobrazení A je množina všech obrazů, t.j.

$$\mathcal{H}(A) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \exists \mathbf{u} \in \mathcal{U}, A(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\}.$$

VĚTA 4

Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak $\mathcal{H}(A)$ je podprostorem \mathcal{V} .

DŮKAZ: Jestliže $\mathbf{u} = A(\mathbf{x})$, $\mathbf{v} = A(\mathbf{y})$ a α je skalár, pak

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \text{ a } \alpha\mathbf{u} = \alpha A(\mathbf{x}) = A(\alpha\mathbf{x}).$$

8.3 Nulový prostor a obor hodnot

VĚTA 5

Nechť \mathcal{U} , \mathcal{V} jsou vektorové prostory, nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ a nechť $A(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b}$. Potom libovolné řešení \mathbf{x} rovnice

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

lze zapsat ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$, kde $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(A)$.

DŮKAZ: Necht' $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Potom platí

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o},$$

takže vektor $\mathbf{n} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ patří do jádra $\mathcal{N}(A)$ a $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}$.

DŮSLEDEK: Lineární zobrazení A je prosté, právě když

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{o}\}.$$

8.3 Nulový prostor a obor hodnot

DEFINICE 4

Nechť \mathcal{U} , \mathcal{V} jsou vektorové prostory konečné dimenze a nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Pak *hodnota* $h(A)$ *zobrazení* A definujeme jako dimenzi $\mathcal{H}(A)$ a *defekt* $d(A)$ *zobrazení* A definujeme jako dimenzi $\mathcal{N}(A)$.

VĚTA 6

Nechť \mathcal{U} , \mathcal{V} jsou vektorové prostory konečné dimenze a nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Potom

$$h(A) + d(A) = \dim(\mathcal{U}).$$

DŮSLEDEK: Lineární transformace $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ definovaná na vektorovém prostoru konečné dimenze \mathcal{V} je zobrazení na \mathcal{V} , právě když A je prosté zobrazení.

8.4 Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

Mnoho technických problémů lze zformulovat jako úlohu najít pro dané lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ a pro $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$ vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ tak, aby platilo

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \quad (R)$$

Například úlohu najít neznámé průhyby vodiče z příkladu III z úvodní přednášky můžeme zapsat ve tvaru

$$A(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

8.4 Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

Předpokládejme nyní, že známe například řešení \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 rovnice (R) pro dvě pravé strany \mathbf{b}_1 a \mathbf{b}_2 , tedy že platí

$$A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1 \text{ a } A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2,$$

a že navíc platí $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.

Pak můžeme určit řešení \mathbf{x} rovnice (R) pouhým sečtením \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 , neboť pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ platí

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}.$$

Tomuto jednoduchému důsledku vlastností lineárních zobrazení se říká *princip superpozice*.

8.4 Princip superpozice a inverze lineárních zobrazení

VĚTA 7

Nechť $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení vektorového prostoru \mathcal{U} na vektorový prostor \mathcal{V} . Pak existuje A^{-1} , které je rovněž lineární zobrazení.

8.5 Matice lineárního zobrazení

VĚTA 8

Nechť $A : \mathbb{R}^{m,1} \mapsto \mathbb{R}^{n,1}$ je libovolné lineární zobrazení. Pak existuje matice \mathbf{A} typu (n, m) tak, že pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ platí

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

DŮKAZ: Jelikož libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m,1}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + \cdots + x_m \mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}$$

lze $A(\mathbf{x})$ zapsat pomocí

$$A(\mathbf{x}) = A(x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} + \cdots + x_m \mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = x_1 A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}) + \cdots + x_m A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

kde

$$\mathbf{A} = [A(\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}), \dots, A(\mathbf{s}_m^{\mathbf{I}})] = [a_{ij}].$$

8.5 Matice lineárního zobrazení

Lineární zobrazení

$$A : \mathbb{R}^{m,1} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^{n,1}$$

se často ztotožňuje s maticí \mathbf{A} a o matici \mathbf{A} se mluví jako o lineárním zobrazení.

V tomto smyslu budeme i my používat pojmy *obor hodnot matice \mathbf{A}* , *nulový prostor matice \mathbf{A}* , nebo *defekt matice \mathbf{A}* .

Pojmy, které jsme si doposud zavedli jsou v souladu s touto konvencí. Například obor hodnot $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ každé matice \mathbf{A} je totožný s jejím sloupcovým prostorem $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, takže pro hodnosti matice a zobrazení platí

$$h(\mathbf{A}) = h(A).$$

8.5 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 5 Určete bázi nulového prostoru matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

ŘEŠENÍ: Budeme řešit soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Nejprve upravíme matici \mathbf{A} pomocí řádkových úprav na schodový tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} -r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_2 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtud $h(\mathbf{A}) = 2$ (počet nenulových řádků) a $d(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$.

Bázi $\mathcal{N}(A)$ tedy tvoří jakékoliv dva nezávislé vektory, jejichž složky řeší soustavu

$$\begin{array}{rcccccl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & & -x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

Vypočteme je tak, že za x_2 a x_4 dosadíme postupně například složky

$\mathbf{e}_1 = [1, 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1]$ a vypočteme $x_1 = -1$, $x_3 = 0$ a $x_1 = -3$, $x_3 = 0$.

Bázi nulového prostoru tedy tvoří vektory

$$\mathbf{n}_1 = [-1, 1, 0, 0], \quad \mathbf{n}_2 = [-3, 0, 0, 1].$$

8.5 Matice lineárního zobrazení

Díváme-li se na matici \mathbf{A} jako na lineární zobrazení $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, můžeme využít dosavadních výsledků o lineárních zobrazeních k alternativnímu výkladu teorie řešitelnosti lineárních soustav:

- Soustava lineárních rovnic má řešení, právě když pravá strana patří do oboru hodnot matice soustavy
- Řešení je jediné, jestliže $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{o}\}$, tedy defekt $d(\mathbf{A}) = 0$, což je ekvivalentní s $h(\mathbf{A}) = n$, kde n je počet neznámých.

VĚTA 9

Nechť \mathbf{A} je matice typu (m, n) pro kterou platí $d(\mathbf{A}) > 0$, nechť \mathbf{b} je m -rozměrný sloupcový vektor, nechť $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ a nechť $(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d)$ je báze $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Potom libovolné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ může být zapsáno ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha_1\mathbf{n}_1 + \dots + \alpha_d\mathbf{n}_d$.

8.5 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 6 Najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 2 \end{array}$$

ŘEŠENÍ: Rozšířenou matici soustavy nejprve upravíme na schodový tvar

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[-2r_1]{-r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[-2r_2]{-2r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Z něho dostaneme částečné řešení \mathbf{x}_0 řešením soustavy

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & & - & x_3 & & = & 1 \end{array}$$

tak, že položíme například $x_2 = 0$ a $x_4 = 0$. Dostaneme $x_1 = 2$, $x_3 = -1$.

Jelikož matice soustavy je stejná jako matice \mathbf{A} v příkladu 5, můžeme napsat

libovolné řešení soustavy pomocí parametrů α_1, α_2 :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8.5 Matice lineárního zobrazení

Budeme předpokládat, že \mathcal{U} a \mathcal{V} jsou dva vektorové prostory konečné dimenze s bázemi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$.

DEFINICE 5

Nechť $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Pak můžeme vektory $A(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_m)$ vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ ve tvaru:

$$\begin{array}{rcl} A(\mathbf{e}_1) & = & a_{11}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{f}_n \\ \vdots & & \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ A(\mathbf{e}_m) & = & a_{1m}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{nm}\mathbf{f}_n \end{array}$$

Matici $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [a_{ij}] = [[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}}, \dots, [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}}]$ nazýváme *maticí lineárního zobrazení A vzhledem k bázím $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$* . Jestliže $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ a $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, pak budeme mluvit o *matici lineární transformace vzhledem k bázi \mathcal{E}* a místo $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ budeme psát stručně $[A]_{\mathcal{E}}$.

8.5 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 7 Nechť $\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_2$ mají báze $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$, kde $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ a $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$, kde $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$.
Najděte matici derivace

$$D : \mathcal{P}_3 \ni p \mapsto p' \in \mathcal{P}_2.$$

ŘEŠENÍ: Nejdříve najdeme souřadnice $D(e_1), D(e_2)$ a $D(e_3)$ v bázi \mathcal{F} . Jelikož $D(e_1)(x) = 0, D(e_2)(x) = 1$ a $D(e_3)(x) = 2x$, můžeme napsat přímo:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ 2x & = & 0 \cdot 1 + 2 \cdot x \end{array}$$

Souřadnice $D(e_1), D(e_2)$ a $D(e_3)$ vzhledem k \mathcal{F} tvoří zřejmě koeficienty na řádcích, které zapíšeme do sloupců a dostaneme

$$[D]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8.5 Matice lineárního zobrazení

VĚTA 10

Nechť $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je lineární zobrazení, \mathcal{E} je báze \mathcal{U} a \mathcal{F} je báze \mathcal{V} .

Pak pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ platí

$$[A(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}.$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned} [A(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} &= [A(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_m\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} = \\ &= [x_1A(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_mA(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} = \\ &= x_1[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}} + \cdots + x_m[A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} = \\ &= \left[[A(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{F}}, \dots, [A(\mathbf{e}_m)]_{\mathcal{F}} \right] [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \\ &= [A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

8.5 Matice lineárního zobrazení

PŘÍKLAD 8 S využitím řešení příkladu 7 vypočtete derivaci libovolného mnohočlenu p nejvýše druhého stupně.

ŘEŠENÍ: Mnohočlen $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_3$ má v bázi \mathcal{E} souřadnice

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}.$$

Jelikož jsme si v příkladu 7 ukázali, že derivace $D : \mathcal{P}_3 \mapsto \mathcal{P}_2$ má v bázích \mathcal{E}, \mathcal{F} matici

$$[D]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

platí

$$[p']_{\mathcal{F}} = [Dp]_{\mathcal{F}} = [D]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \end{bmatrix}.$$

Odtud

$$p'(x) = b \cdot f_1(x) + 2a \cdot f_2(x) = b + 2ax.$$

8.5 Matice lineárního zobrazení

VĚTA 11

Nechť $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ a $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ jsou lineární transformace. Pak složené zobrazení $AB : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ definované předpisem $(AB)(\mathbf{x}) = A(B(\mathbf{x}))$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je lineární transformace na \mathcal{U} a

$$[AB]_{\mathcal{E}} = [A]_{\mathcal{E}} [B]_{\mathcal{E}}.$$

8.6 Změna báze

Nechť $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ jsou dvě báze \mathcal{U} . Necht' $C : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ je lineární zobrazení takové, že $C(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i$. Zobrazení C tedy zobrazuje bázi \mathcal{E} na bázi \mathcal{F} , takže podle důsledku věty 6 je vzájemně jednoznačné a podle věty 7 existuje C^{-1} .

Nechť $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je libovolný vektor a $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = [x_1, \dots, x_n]$. Pak z

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$

plyne

$$C(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{f}_1 + \dots + x_n \mathbf{f}_n,$$

takže

$$[C(\mathbf{x})]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}.$$

Odtud dostaneme

$$[C]_{\mathcal{F}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}.$$

Označíme-li $\mathbf{T} = [C]_{\mathcal{F}}^{-1} = [C^{-1}]_{\mathcal{F}} = [[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{F}}, \dots, [\mathbf{e}_n]_{\mathcal{F}}]$ dostaneme

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}} = \mathbf{T} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}.$$

8.6 Změna báze

DEFINICE 6

Nechť $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ jsou dvě báze vektorového prostoru \mathcal{U} . Matice

$$\mathbf{T} = [[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{F}}, \dots, [\mathbf{e}_n]_{\mathcal{F}}]$$

se nazývá *matice zpětného přechodu* od nové báze \mathcal{F} k bázi \mathcal{E} .

Uvažujme *matici přechodu* $\mathbf{S} = [C]_{\mathcal{E}}$ od původní báze \mathcal{E} k bázi \mathcal{F} .

Mezi maticí zpětného přechodu \mathbf{T} a maticí přechodu \mathbf{S} platí vztah

$$\begin{aligned} \mathbf{TS} &= \mathbf{T} [[C(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, \dots, [C(\mathbf{e}_n)]_{\mathcal{E}}] = [\mathbf{T} [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}}, \dots, \mathbf{T} [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}}] = \\ &= [[\mathbf{f}_1]_{\mathcal{F}}, \dots, [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{F}}] = \mathbf{I}, \end{aligned}$$

takže $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Pro tuto matici platí vztah $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{S} [\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}$.

8.6 Změna báze

VĚTA 12

Nechť A je lineární transformace \mathcal{U} , \mathcal{E} a \mathcal{F} jsou báze \mathcal{U} a nechť \mathbf{T} je matice zpětného přechodu od nové báze \mathcal{F} k bázi \mathcal{E} . Pak platí

$$[A]_{\mathcal{F}} = \mathbf{T} [A]_{\mathcal{E}} \mathbf{T}^{-1}.$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned} [A]_{\mathcal{F}} &= [[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{F}}, \dots, [A(\mathbf{f}_n)]_{\mathcal{F}}] = [\mathbf{T} [A(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{E}}, \dots, \mathbf{T} [A(\mathbf{f}_n)]_{\mathcal{E}}] = \\ &= \mathbf{T} [[A(\mathbf{f}_1)]_{\mathcal{E}}, \dots, [A(\mathbf{f}_n)]_{\mathcal{E}}] = \mathbf{T} [[A]_{\mathcal{E}} [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{E}}, \dots, [A]_{\mathcal{E}} [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{E}}] = \\ &= \mathbf{T} [A]_{\mathcal{E}} [\mathbf{T}^{-1} [\mathbf{f}_1]_{\mathcal{F}}, \dots, \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{f}_n]_{\mathcal{F}}] = \mathbf{T} [A]_{\mathcal{E}} \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{I}}] = \\ &= \mathbf{T} [A]_{\mathcal{E}} \mathbf{T}^{-1}. \end{aligned}$$

8.7 Podobnost matic

DEFINICE 7

Čtvercové matice **A** a **B** stejného řádu jsou *podobné*, jestliže existuje regulární matice **T** tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}.$$

VĚTA 13

Matice dané lineární transformace v různých bázích jsou podobné.

Dá se dokázat i tvrzení, že jsou-li matice podobné, pak jsou maticemi nějaké lineární transformace v různých bázích. Jelikož podstatné charakteristiky lineárních transformací (například hodnost nebo defekt) nezávisí na bázi prostoru, dá se očekávat, že podobné matice budou mít podstatné charakteristiky shodné.