
3. Inverzní matice

Inverzní matice

1. Maticový zápis elementárních úprav
2. Inverzní matice
3. Elementární úpravy a regularita
4. Výpočet inverzní matice
5. Inverzní matice a řešení soustav
6. Vyčíslení výrazů s inverzní maticí
7. Použití inverzní matice

3.1 Maticový zápis elementárních úprav

Násobení maticí zleva lze popsat jako manipulaci s řádky násobené matice.

Pro $\mathbf{T} = [t_{ij}]$ a $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu dvě platí

$$\mathbf{TA} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + t_{12}\mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ t_{21}\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + t_{22}\mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{bmatrix}$$

Například matice \mathbf{T} provede výměnu 1. a 2. řádku násobením $\mathbf{A}' = \mathbf{TA}$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jestliže $\mathbf{A}' = \mathbf{TA}$ vznikne z \mathbf{A} nějakou pevně zvolenou elementární transformací, pak také $\mathbf{I}' = \mathbf{TI} = \mathbf{T}$ vznikne z jednotkové matice \mathbf{I} toutéž transformací.

3.1 Maticový zápis elementárních úprav

Násobení i -tého řádku nenulovým číslem α .

$$\mathbf{I} = \begin{matrix} & & & i & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \alpha \mapsto$$
$$\mapsto \begin{matrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_i(\alpha)$$

3.1 Maticový zápis elementárních úprav

Přičtení násobku i -tého řádku k j -tému řádku.

$$\mathbf{I} = \begin{matrix} & & & i & & j & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ i & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ j & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+\alpha r_i}$$

$$\xrightarrow{} \begin{matrix} & & & i & & j & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ i & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ j & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{ij}(\alpha)$$

3.1 Maticový zápis elementárních úprav

PŘÍKLAD 1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \\ r_1 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} r_1 \mapsto \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad G_{12} \left(\frac{1}{2} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Inverzní matice

DEFINICE 1

Nechť A je čtvercová matice. Jestliže existuje matice B tak, že

$$AB = BA = I,$$

pak se matice B nazývá *inverzní maticí* k matici A a značí se A^{-1} . Čtvercová matice, ke které existuje inverzní matice, se nazývá *regulární*. V opačném případě takovou matici nazýváme *singulární*.

VĚTA 1

Ke každé regulární matici A existuje právě jedna inverzní matice.

3.2 Inverzní matice

DŮKAZ: Necht' B_1, B_2 jsou inverzní matice k matici A , takže platí

$$AB_1 = I \quad \text{a} \quad B_2A = I.$$

Vynásobíme-li první rovnost zleva maticí B_2 a druhou rovnici zprava B_1 , dostaneme

$$B_2 = B_2AB_1 = B_1.$$

LEMMA 1 Má-li matice A nulový řádek pak je singulární.

DŮKAZ: Je-li B libovolná matice, pak platí

$$AB = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{bmatrix} \neq I.$$

3.3 Elementární úpravy a regularita

VĚTA 2

Jsou-li matice \mathbf{A} , \mathbf{B} regulární, potom je také matice \mathbf{AB} regulární a platí

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

DŮKAZ: $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} =$
 $= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}).$

Uvedený vztah lze pomocí matematické indukce zobecnit na

$$(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1}.$$

3.3 Elementární úpravy a regularita

LEMMA 2 Matice elementárních úprav jsou regulární a platí:

1. $\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}$,
2. $\mathbf{M}_i^{-1}(\alpha) = \mathbf{M}_i(\alpha^{-1})$ pro $\alpha \neq 0$
3. $\mathbf{G}_{ij}^{-1}(\alpha) = \mathbf{G}_{ij}(-\alpha)$

VĚTA 3

Elementární řádkové úpravy zachovávají regularitu upravované matice.

DŮKAZ: Jestliže matice \mathbf{A}' vznikne z regulární matice \mathbf{A} elementárními řádkovými úpravami, pak

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}, \\ \text{a } (\mathbf{A}')^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{T}_1^{-1} \cdots \mathbf{T}_k^{-1}, \end{aligned}$$

tedy \mathbf{A}' je regulární.

3.4 Výpočet inverzní matice

VĚTA 4

Nechť A je čtvercová matice řádu n . Pak rovnice

$$AX = I \quad (*)$$

má jediné řešení X právě tehdy, když A je regulární.
V tom případě platí $X = A^{-1}$.

DŮKAZ: Jestliže A je regulární, pak přenásobením obou stran (*) zleva maticí A^{-1} dostaneme $X = A^{-1}$.

Obráceně, jestliže rovnice $AX = I$ má jediné řešení, pak rozšířenou matici $[A|I]$ je možno pomocí ekvivalentních řádkových úprav převést na tvar $[I|B]$.

3.4 Výpočet inverzní matice

Potom existují elementární matice transformací $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k$ tak, že pro matici $\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$ platí

$$\mathbf{T}[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = [\mathbf{I}|\mathbf{B}].$$

Roznásobíme-li matice vlevo, dostaneme porovnáním obou částí rozšířené matice

$$\begin{aligned}\mathbf{TA} &= \mathbf{I}, & \mathbf{T} &= \mathbf{B}, \\ \mathbf{BA} &= \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Jelikož matice $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ vznikla z $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ ekvivalentními řádkovými úpravami, má (*) jediné řešení \mathbf{X} , které je řešením soustavy

$$\mathbf{IX} = \mathbf{B},$$

tedy $\mathbf{X} = \mathbf{B}$ a $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

3.4 Výpočet inverzní matice

PŘÍKLAD 2 Vypočtěte \mathbf{A}^{-1} pokud existuje.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ŘEŠENÍ: Postupnou úpravou rozšířené matice pro soustavu $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ dostaneme

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}|\mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] + \frac{1}{2}r_1 \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] + \frac{2}{3}r_2 \mapsto \\ &\mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right] = [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]. \end{aligned}$$

Matice \mathbf{A} je tedy regulární a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.5 Řešení soustav a inverzní matice

VĚTA 5

Nechť \mathbf{A} je regulární matice a nechť \mathbf{b} je sloupcový vektor stejného řádu. Pak má soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

DŮKAZ: Nechť \mathbf{A} je daná regulární matice.
Vynásobíme-li soustavu

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

maticí \mathbf{A}^{-1} zleva, dostaneme

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

3.5 Řešení soustav a inverzní matice

PŘÍKLAD 3 Pomocí inverzní matice najděte řešení soustavy

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 2\end{aligned}$$

ŘEŠENÍ: Soustavu lze zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

S využitím výsledku předchozího příkladu dostaneme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3.6 Vyčíslení výrazů s inverzní maticí

PŘÍKLAD 4 Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vyčíslete $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bb}$

ŘEŠENÍ: Nejprve vypočteme vektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{Bb} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$ je jediným řešením rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$, kterou vyřešíme Gaussovou eliminací

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \end{array} \right]_{+r_1} \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 10 \end{array} \right],$$

odkud $x_1 = \frac{13}{2}$, $x_2 = 10$. Tedy

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bb} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} \\ 10 \end{bmatrix}.$$

3.7 Použití inverzní matice

- K nalezení inverzní matice je zapotřebí asi n^3 operací násobení.
 - Nevyplatí se řešit jednu soustavu pomocí inverzní matice.
 - Může být výhodné řešit soustavy s více pravými stranami pomocí inverzní matice (řešení pro každou pravou stranou pak vyžaduje asi n^2 násobení).
- Inverzní matice je spíše teoretický prostředek.