12. Determinanty

Determinanty

1. Induktivní definice determinantu
2. Determinant a antisymetrické formy
3. Výpočet hodnoty determinantu
4. Determinant součinu matic
5. Rozvoj determinantu podle prvků libovolného řádku
6. Adjungovaná a inverzní matice
7. Determinant transponované matice
8. Determinant jako funkce sloupců
9. Cramerovy vzorce pro řešení soustav

12.1 Induktivní definice determinantu

Budeme řešit soustavu

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Úpravami, které nepoužívají dělení, dostaneme

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \underset{a_{22}\mathrm{r}_1 - a_{12}\mathrm{r}_2}{\mapsto} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 & b_1a_{22} - a_{12}b_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \underset{a_{11}\mathrm{r}_2 - a_{21}\mathrm{r}_1}{\mapsto} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{array}\right]$$

odkud pro $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ dostaneme

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

12.1 Induktivní definice determinantu

Nyní si všimněme, že čitatele i jmenovatele lze vyjádřit pomocí *jedné* funkce matice:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Řešení soustavy lze zapsat za pomocí tohoto označení ve tvaru

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{d}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{d}$$

kde

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Tyto vzorce se dají zobecnit na řešení soustav n rovnic o n neznámých.

12.1 Induktivní definice determinantu

DEFINICE 1
Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, nechť $\mathrm{M}_{ij}^{\mathbf{A}}$ značí matici, která vznikne vyškrtnutím jejího i-tého řádku a j-tého sloupce. Matice $\mathrm{M}_{ij}^{\mathbf{A}}$ se nazývá *minor* matice **A** příslušný k dvojici indexů (i, j).

PŘÍKLAD 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}_{12}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

12.1 Induktivní definice determinantu

DEFINICE 2

Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n s reálnými nebo komplexními prvky. *Determinant matice* $\mathbf{A}$ je číslo, které značíme $\det \mathbf{A}$ nebo $|\mathbf{A}|$ a vypočteme jej podle následujících pravidel:

D1 Je-li $n = 1$, pak $\det \mathbf{A} = \det [a_{11}] = a_{11}$.

D2 Předpokládejme, že $n > 1$ a že umíme určit determinant libovolné čtvercové matice řádu $n - 1$. Pak

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \left|\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{A}}\right| - a_{12} \left|\mathbf{M}_{12}^{\mathbf{A}}\right| + a_{13} \left|\mathbf{M}_{13}^{\mathbf{A}}\right| - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \left|\mathbf{M}_{1n}^{\mathbf{A}}\right|$$

Determinant matice je tedy funkce *prvků* matice, která je definována explicitně pro $n = 1$ a pro $n > 1$ je definována pomocí pravidla, které definuje determinant matice řádu n pomocí determinantů řádu $n - 1$.

12.1 Induktivní definice determinantu

PŘÍKLAD 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\,(-1|1| - 2|2|) - 2\,(1|1| - 2| - 1|) + 3\,(1|2| - (-1)| - 1|) =$$

$$= 1 \cdot (-5) - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = -8.$$

PŘÍKLAD 3

$$\begin{vmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix} = l_{11} \begin{vmatrix} l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = l_{11} \cdots l_{nn}.$$

Odtud speciálně plyne $\det \mathbf{I} = 1$.

12.1 Induktivní definice determinantu

Definujme *algebraický doplněk* matice $\mathbf{A}$ příslušný k dvojici indexů (i, j) předpisem

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \left|\mathbf{M}_{ij}^{\mathbf{A}}\right|.$$

Vzorec **D2** lze pak přepsat ve tvaru

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + \cdots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}.$$

Determinant matice n-tého řádu počítaný podle pravidla **D2** vyžaduje vyčíslení součtu n součinů čísel a determinantů matic řádu $n-1$. Použijeme-li pravidlo **D2** na determinanty řádu $n-1$, dostaneme, že vyčíslení determinantu matice n-tého řádu vyžaduje vyčíslení součtu $n(n-1)$ součinů dvou čísel a determinantů řádu $n-2$. Opakováním tohoto postupu zjistíme, že vyčíslení determinantu matice n-tého řádu vyžaduje $n!$ sčítanců tvořených součiny n čísel, tj. celkem $(n-1)n!$ součinů.

Existují efektivnější postupy výpočtu determinantů.

12.2 Determinant a antisymetrické formy

LEMMA 1 Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ a $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ jsou čtvercové matice, které se liší nanejvýš v prvním řádku, a α je libovolný skalár. Pak

$$\begin{vmatrix} \alpha \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = \alpha \det \mathbf{A}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ * \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

DŮKAZ:

$$\begin{vmatrix} \alpha \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha a_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + \alpha a_{1n}\mathbf{A}_{1n} = \alpha \det \mathbf{A}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} + b_{11})\mathbf{A}_{11} + \dots + (a_{1n} + b_{1n})\mathbf{A}_{1n} =$$

$$= (a_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}) + (b_{11}\mathbf{A}_{11} + \dots + b_{1n}\mathbf{A}_{1n}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

12.2 Determinant a antisymetrické formy

LEMMA 2 Nechť **A**=$[a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$. Pak

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix}.$$

DŮKAZ: Pro $n = 2$ platí

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}) = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \end{vmatrix}.$$

Důkaz pro obecnější případ se provede rozepsáním determinantů minorů v **D2** a vhodnou úpravou. Úplný důkaz je však komplikovaný.

12.2 Determinant a antisymetrické formy

VĚTA 1
Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$ a nechť $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ je matice, která vznikla z matice $\mathbf{A}$ vzájemnou výměnou i-tého a j-tého řádku. Pak

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{|c|c} * & \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} & i \\ * & \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} & j \\ * & \end{array} = - \begin{array}{|c|c} * & \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} & i \\ * & \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} & j \\ * & \end{array} = -\det \mathbf{B}.$$

DŮKAZ: Důkaz se provádí pomocí matematické indukce s využitím Lemma 2. Viz literatura.

12.2 Determinant a antisymetrické formy

VĚTA 2

Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice, které mají stejné řádky s výjimkou k-tého. Pak pro libovolné α platí

$$k\begin{vmatrix} * \\ \alpha\mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = \alpha \det \mathbf{A}, \quad k\begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} \\ * \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

DŮKAZ: Důkaz se provádí pomocí matematické indukce s využitím Lemma 1 a Věty 1. Viz literatura.

Věty 1. a 2. můžeme shrnout tvrzením, že *determinant je antisymetrická bilineární forma libovolné dvojice řádků matice*.

12.2 Determinant a antisymetrické formy

DŮSLEDEK:

Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice:

1. Má-li $\mathbf{A}$ dva stejné řádky, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
2. Má-li $\mathbf{A}$ nulový řádek, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
3. Je-li $\mathbf{B}$ čtvercová matice, která má stejné řádky jako $\mathbf{A}$ s výjimkou k-tého, a

$$\mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}}, \quad k \neq l,$$

   pak $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.

4. Jsou-li řádky $\mathbf{A}$ lineárně závislé, pak $\det \mathbf{A} = 0$.

12.3 Výpočet hodnoty determinantu

Elementární řádkové úpravy ovlivňují velmi jednoduše hodnotu determinantu.

1. Vzájemná výměna dvou řádků změní znaménko determinantu
2. Vynásobení řádku skalárem vynásobí tímto skalárem determinant
3. Přičtení násobku některého řádku k jinému hodnotu determinantu nezmění

Elementární řádkové úpravy matice proto můžeme využít k převodu matice na speciální tvar vhodný pro výpočet determinantu. Pro nás je to prozatím dolní trojúhelníková matice, jejíž determinant je podle příkladu 3 roven součinu diagonálních prvků.

12.3 Výpočet hodnoty determinantu

PŘÍKLAD 4

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} +\mathrm{r}_3 \\ +2\mathrm{r}_3 \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -3\mathrm{r}_2 \\ \\ \end{array} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) \cdot 1 \cdot (-1) = 12$$

PŘÍKLAD 5

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathrm{r}_3 \\ \mathrm{r}_2 \end{array} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -\mathrm{r}_3 \\ \\ \end{array} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -\mathrm{r}_2 \\ \\ \end{array} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

12.4 Determinant součinu matic

VĚTA 3

Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice řádu n. Pak

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

12.5 Rozvoj determinantu podle libovolného řádku

VĚTA 4

Jestliže $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu $n > 1$, pak pro libovolný index k platí

$$\det \mathbf{A} = a_{k1}\mathbf{A}_{k1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{kn}.$$

DŮSLEDEK:

Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu $n > 1$.

1. Jsou-li k, l dva různé indexy řádků matice $\mathbf{A}$, pak

$$a_{k1}\mathbf{A}_{l1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{ln} = 0.$$

2. Je-li $\mathbf{A}$ trojúhelníková matice, pak $\det \mathbf{A} = a_{11} \cdots a_{nn}$.

12.6 Adjungovaná a inverzní matice

DEFINICE 3
Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak *adjungovaná matice* $\widetilde{\mathbf{A}}$ k matici $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stejného řádu definovaná předpisem

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}.$$

PŘÍKLAD 6 Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{je} \qquad \widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 8 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

12.6 Adjungovaná a inverzní matice

PŘÍKLAD 6 *Pokračování*

Opravdu

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \mathbf{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8,$$

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \mathbf{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3,$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3-3 = -6, \quad \mathbf{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \mathbf{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

12.6 Adjungovaná a inverzní matice

VĚTA 5

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová regulární matice řádu $n > 1$. Pak $\det \mathbf{A} \neq 0$ a

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \widetilde{\mathbf{A}}.$$

12.6 Adjungovaná a inverzní matice

PŘÍKLAD 7 Pro matici $\mathbf{A}$ definovanou v Příkladu 6 dostaneme

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 8 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

DŮSLEDEK:

Matice $\mathbf{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

DŮKAZ:

Je-li $\mathbf{A}$ singulární, pak má závislé řádky, takže podle důsledku 4 vět 1 a 2 platí $\det \mathbf{A} = 0$. Obrácené tvrzení plyne z věty 5.

12.7 Determinant transponované matice

VĚTA 6

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Pak $\det \mathbf{A}^\top = \det \mathbf{A}$.

12.8 Determinant jako funkce sloupců

Z věty 6 vyplývá, že determinant považovaný za funkci sloupců má stejné vlastnosti jako determinant považovaný za funkci řádků. Například *determinant je antisymetrická bilineární forma libovolné dvojice sloupců matice*.

VĚTA 7

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak pro $i = 1, \dots, n$ platí

$$\det \mathbf{A} = a_{1i}\mathbf{A}_{1i} + \cdots + a_{ni}\mathbf{A}_{ni}.$$

12.9 Cramerovy vzorce

Použijeme-li vzorec pro inverzní matici k řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s regulární čtvercovou maticí **A** řádu $n > 1$, dostaneme pro složky x_i řešení **x** vzorce

$$x_i = \left[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\right]_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\mathbf{A}_{1i}b_1 + \cdots + \mathbf{A}_{ni}b_n).$$

Minory příslušné k prvkům i-tého sloupce neobsahují prvky i-tého sloupce, a proto můžeme výraz v kulaté závorce považovat za rozvoj determinantu podle i-tého sloupce matice

$$\mathbf{A}_i^{\mathbf{b}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & i & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} * & \mathbf{b} & * \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} & \dots & \mathbf{s}_{i-1}^{\mathbf{A}} & \mathbf{b} & \mathbf{s}_{i+1}^{\mathbf{A}} & \dots & \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} \end{array}\right] \end{array},$$

která vznikne z **A** záměnou i-tého sloupce za **b**. Výrazy

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i^{\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \qquad i = 1, \dots, n$$

se nazývají *Cramerovy vzorce*.

12.9 Cramerovy vzorce

PŘÍKLAD 8 Pomocí Cramerových vzorců najděte řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

ŘEŠENÍ: Postupně vypočteme determinant matice soustavy

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

a čitatele Cramerových vzorců

$$|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12, |\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 48, |\mathbf{A}_3^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Odtud

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = \frac{3}{5}, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = \frac{12}{5}, \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = -\frac{3}{5}.$$