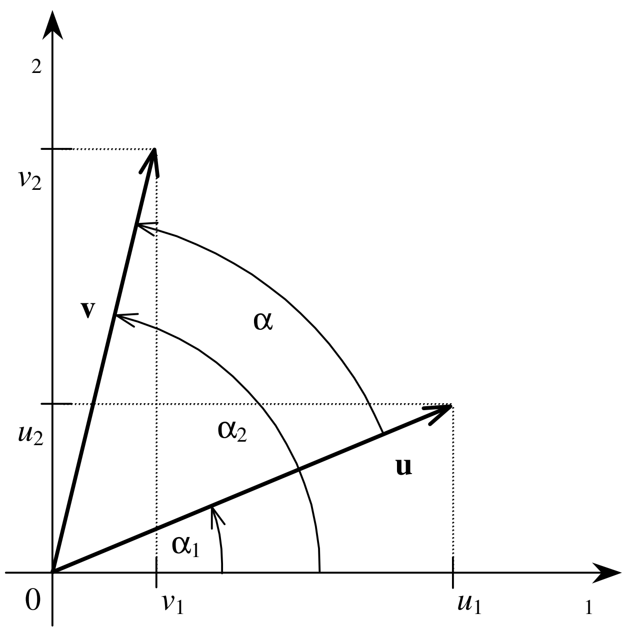
11. Skalární součin a ortogonalita

Skalární součin a ortogonalita

1. Definice skalárního součinu
2. Norma vektoru
3. Norma indukovaná skalárním součinem
4. Ortogonální množiny vektorů
5. Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces
6. Ortogonální matice

11.1 Definice skalárního součinu



Pro kosinus úhlu α vektorů **u** a **v** platí

$\cos\alpha = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) =$

$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 =$

$= \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \cdot \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} + \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \cdot \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$

Označíme-li

$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2$

dostaneme

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

11.1 Definice skalárního součinu

DEFINICE 1

Skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ je symetrická bilineární forma na $\mathcal{V}$, jejíž odpovídající kvadratická forma je pozitivně definitní.

Označíme-li si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, platí tedy pro jakékoliv vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$:

S1 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$

S2 $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

S3 $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$

S4 $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \qquad \text{pro} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{o}$

Například $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\top \mathbf{A}\mathbf{v}$, kde $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní.

11.2 Norma vektoru

DEFINICE 2
Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor. Zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ přiřazuje nezáporné reálné číslo $\|\mathbf{v}\|$, se nazývá *norma*, jestliže pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a libovolný skalár α platí:

N1 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

N2 $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$

N3 $\|\mathbf{u}\| = 0, \qquad$ právě když $\quad \mathbf{u} = \mathbf{o}$

PŘÍKLAD 1

1. Předpis $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max\{|u_1|, |u_2|\}$ definuje normu na $\mathbb{R}^2$.
2. Předpis $\|\mathbf{u}\|_1 = |u_1| + |u_2|$ definuje normu na $\mathbb{R}^2$.

11.3 Norma indukovaná skalárním součinem

VĚTA 1 (SCHWARZOVA NEROVNOST)
Nechť $\mathcal{V}$ je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Pak pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Rovnost nastane, právě když jsou **u**, **v** závislé.

DŮKAZ: Tvrzení je zřejmé, je-li některý z vektorů nulový. Předpokládejme proto, že $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, a všimněme si, že pro každé dva vektory **u**, **v** platí

$$0 \leq (\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Zvolíme-li si

$$\alpha = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})},$$

dostaneme po úpravě

$$0 \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})},$$

odkud po vynásobení obou stran nerovnosti $(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ a jednoduché úpravě dostaneme nerovnost. Rovnost nastane, jen když $(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) = 0$, t.j. $1 \cdot \mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} = \mathbf{o}$.

11.3 Norma indukovaná skalárním součinem

DŮSLEDEK: Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem a nechť je pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ definováno $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$. Pak pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

a zobrazení $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ je norma na $\mathcal{V}$.

DŮKAZ: Z axiomů skalárního součinu a Schwarzovy nerovnosti plyne

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq$$

$$\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 .$$

Platnost zbývajících dvou axiomů normy je bezprostředním důsledkem axiomů skalárního součinu.

Norma definovaná předpisem $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$, kde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ a $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$, se nazývá *eukleidovská norma*.

11.4 Ortogonální množiny vektorů

Definice ortogonality vektorů je motivována známou skutečností, že dva polohové vektory v rovině či prostoru jsou ortogonální, právě když je kosinus jejich úhlu roven nule.

DEFINICE 3

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor se skalárním součinem. Množina vektorů $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_k\}$ je *ortogonální*, právě když $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ pro $i \neq j$.

Jestliže navíc $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$, pak je $\mathcal{E}$ *ortonormální*.

Množina všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, které jsou ortogonální k dané množině vektorů $\mathcal{U}$, se nazývá *ortogonální doplněk* $\mathcal{U}$ (vzhledem k množině $\mathcal{V}$) a značí se $\mathcal{U}^{\perp}$.

11.4 Ortogonální množiny vektorů

LEMMA 1 Je-li $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ ortogonální množina nenulových vektorů, pak je $\mathcal{E}$ nezávislá.

DŮKAZ: Po skalárním vynásobení rovnosti $x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_k\mathbf{e}_k = \mathbf{o}$ vektorem $\mathbf{e}_i \in \mathcal{E}$ dostaneme

$$(\mathbf{e}_i, x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_k\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{o}),$$

odkud pomocí axiomů skalárního součinu získáme $x_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 0$, tedy $x_i = 0$

PŘÍKLAD 2 Vypočtěte souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ v ortogonální bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$.

ŘEŠENÍ: Z rovnosti

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_k\mathbf{e}_k$$

dostaneme po skalárním vynásobení obou stran vektorem $\mathbf{e}_i \in \mathcal{E}$ a úpravě, že

$$x_i = \frac{(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})}{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}.$$

Nemusíme tedy řešit žádnou soustavu rovnic.

11.4 Ortogonální množiny vektorů

Příklad 3 Nechť $e_1(x) = x$ a $e_2(x) = 1 - x$ jsou dvě lineární funkce vektorového prostoru P_2 všech lineárních funkcí se skalárním součinem definovaným rovností

$$(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Snadno se ověří, že předpis skutečně definuje skalární součin na P_2 a že $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ tvoří ortonormální bázi P_2, neboť

$$(e_1, e_2) = 0(1-0) + 1(1-1) = 0, \quad (e_1, e_1) = 1, \quad (e_2, e_2) = 1.$$

Pak libovolnou lineární funkci $e(x) = a + bx$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

kde

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & = & (e, e_1) & = & e(0) \cdot e_1(0) + e(1) \cdot e_1(1) & = & e(1) & = & a + b \\ \alpha_2 & = & (e, e_2) & = & e(0) \cdot e_2(0) + e(1) \cdot e_2(1) & = & e(0) & = & a. \end{array}$$

Snadno si ověříme, že skutečně platí $a + bx = (a+b)x + a(1-x)$.

11.5 Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces

Kde vzít ortogonální bázi? Z každé báze $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$ lze sestavit ortogonální bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Na začátku si všimneme, že $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{o}$, a položíme

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1.$$

Předpokládejme, že máme ortogonální vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ takové, že pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ je vektor $\mathbf{e}_i$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_i$. Najdeme koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, aby

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{f}_{k+1} - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \ldots - \alpha_k \mathbf{e}_k$$

byl ortogonální k $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$.

Jelikož pro $i \in \{1, \ldots, k\}$ by mělo platit

$0 = (\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{f}_{k+1} - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \ldots - \alpha_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i) - \alpha_i \|\mathbf{e}_i\|^2$,

stačí položit $\alpha_i = (\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{e}_i) / \|\mathbf{e}_i\|^2$.

11.5 Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces

Právě popsaný algoritmus se nazývá *Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces*.

Normalizací vektorů báze $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ dostaneme ortonormální bázi $\mathcal{G} = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n)$ s vektory

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|}, \ \ldots, \ \mathbf{g}_n = \frac{\mathbf{e}_n}{\|\mathbf{e}_n\|}.$$

PŘÍKLAD 4 Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Najděte ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{A}} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

11.5 Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces

ŘEŠENÍ: Bázi sestavíme Gramovým–Schmidtovým ortonormalizačním procesem ze standardní báze $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_3^{\mathbf{I}})$.

- $$\mathbf{e}_1 = \mathbf{s}_1^{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
- Položíme $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} - \alpha \mathbf{e}_1$ a určíme α aby platilo
$$0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)_{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}} - \alpha \mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_1 = -1 - 2\alpha,$$
odkud $\alpha = -\frac{1}{2}$ a
$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

11.5 Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces

ŘEŠENÍ *(Pokračování):*

- Položíme $\mathbf{e}_3 = \mathbf{s}_3^{\mathbf{I}} - \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \alpha_2 \mathbf{e}_2$ a určíme α_1, α_2 aby platilo

$$
\begin{array}{rclclcl}
0 & = & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)_{\mathbf{A}} & = & \mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{s}_3^{\mathbf{I}} - \alpha_1 \mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_1 & = & -2\alpha_1, \\
0 & = & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)_{\mathbf{A}} & = & \mathbf{e}_2^\top \mathbf{A} \mathbf{s}_3^{\mathbf{I}} - \alpha_2 \mathbf{e}_2^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_2 & = & -1 - \frac{3}{2}\alpha_2.
\end{array}
$$

Řešením této soustavy dostaneme $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{2}{3}$ a

$$
\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(-\frac{2}{3}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

11.6 Ortogonální matice

Čtvercová matice $\mathbf{U}$, která splňuje $\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{I}$, se nazývá *ortogonální matice*. Ortogonální matice má tedy ortonormální sloupce a splňuje $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\top$.

VĚTA 3

Nechť $\mathbf{U}$ je čtvercová matice řádu n. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. $\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{I}$.
2. Pro všechny sloupcové vektory $\mathbf{x}$ řádu n platí $(\mathbf{U}\mathbf{x})^\top (\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x}$.
3. Pro všechny sloupcové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ řádu n platí $(\mathbf{U}\mathbf{x})^\top (\mathbf{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$.