10. Kvadratické formy

Kvadratické formy

1. Definice a příklady
2. Základní vlastnosti
3. Matice kvadratické formy
4. Diagonální tvar matice kvadratické formy
5. Pozitivně definitní kvadratické formy
6. Kongruence symetrické a diagonální matice
7. Zákon setrvačnosti kvadratických forem

10.1 Definice a příklady

DEFINICE 1
Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor a nechť B je bilineární forma na $\mathcal{V}$. Zobrazení Q_B definované pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ předpisem

$$Q_B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

se nazývá *kvadratická forma* příslušná bilineární formě B. Kvadratickou formou budeme stručně nazývat zobrazení Q definované na $\mathcal{V}$, pro které existuje bilineární forma B na $\mathcal{V}$ tak, že $Q = Q_B$.

Kvadratickou formu můžeme považovat za zobecnění funkce $y = ax^2$ na vektorové prostory.

10.1 Definice a příklady

PŘÍKLAD 1 Na prostoru $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ sloupcových vektorů dimenze 3 je definováno zobrazení Q, které každému vektoru $\mathbf{x} = [x_i]$ přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

což je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované v příkladě 1 o bilineárních formách. Interpretujeme-li $\mathbf{x}$ jako polohový vektor, pak $Q(\mathbf{x})$ je druhá mocnina jeho délky.

PŘÍKLAD 2 Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je daná reálná čtvercová matice řádu 2. Pak zobrazení, které každému sloupcovému vektoru $\mathbf{x} = [x_i]$ dimenze dvě přiřazuje

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

je kvadratická forma příslušná bilineární formě definované v příkladě 2 o bilineárních formách.

PŘÍKLAD 3 Nechť $\mathcal{F}$ je prostor všech reálných funkcí. Pak předpis, který každé funkci $f \in \mathcal{F}$ přiřazuje

$$Q(f) = f(1)^2 + f(2)^2,$$

definuje kvadratickou formu příslušnou bilineární formě definované v příkladě 3 o bilineárních formách.

10.2 Základní vlastnosti

LEMMA 1 Nechť $\mathcal{V}$ je reálný vektorový prostor. Pro každou kvadratickou formu Q na $\mathcal{V}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ a reálné α platí

$$Q(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 Q(\mathbf{x})$$

DŮKAZ: Pro každou bilineární formu B na $\mathcal{V}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ a reálné α platí $B(\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Je-li $Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pak platí tvrzení věty.

DŮSLEDEK: Z věty bezprostředně plyne, že

$$Q(\mathbf{o}) = Q(0 \cdot \mathbf{o}) = 0$$

a že obor hodnot $\mathcal{H}(Q)$ každé kvadratické formy Q obsahuje s každým číslem i jeho nezáporné násobky. Obor hodnot *nulové kvadratické formy* definované předpisem $Q(\mathbf{x}) = 0$ obsahuje pouze číslo 0.

10.2 Základní vlastnosti

VĚTA 1

Pro každou bilineární formu B na $\mathcal{V}$ a jí příslušnou kvadratickou formu Q_B a libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ platí

$$B^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\big(Q_B(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q_B(\mathbf{x}) - Q_B(\mathbf{y})\big).$$

DŮKAZ: Tvrzení přímo vyplývá z rovnice
$B(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, neboť pak
$Q_B(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = Q_B(\mathbf{x}) + 2B^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + Q_B(\mathbf{y})$.

Jelikož pro libovolnou symetrickou bilineární formu B na $\mathcal{V}$ platí $B = B^{\mathrm{S}}$, plyne z věty 1, že každá symetrická bilineární forma B na $\mathcal{V}$ je plně určena svou kvadratickou formou. Při studiu kvadratických forem se můžeme omezit na kvadratické formy příslušné symetrickým bilineárním formám, neboť pro libovolnou bilineární formu B na $\mathcal{V}$ a $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ platí $Q_B(\mathbf{x}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

10.3 Matice kvadratické formy

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze s bází $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a nechť Q je daná kvadratická forma příslušná bilineární formě B. Pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ platí

$$Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [B]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} .$$

Je proto přirozené považovat matici $[B]_{\mathcal{E}}$ za matici kvadratické formy Q příslušné bilineární formě B v bázi $\mathcal{E}$. Podle věty 1 však kvadratická forma příslušná B přísluší též symetrické části B^{S} bilineární formy B. Proto definujeme *matici kvadratické formy* Q_B příslušné k bilineární formě B jako symetrickou matici

$$[Q_B]_{\mathcal{E}} = \left[B^{\mathrm{S}}\right]_{\mathcal{E}} \left(= \frac{1}{2} \left([B]_{\mathcal{E}} + [B]_{\mathcal{E}}^{T} \right) \right) .$$

Při studiu matic kvadratických forem se tedy můžeme omezit na symetrické matice.

10.4 Diagonální tvar matice kvadratické formy

Při studiu kvadratických forem chceme určit, jakých hodnot může nabývat daná kvadratická forma. Máme-li matici kvadratické formy v diagonálním tvaru, pak se hodnota kvadratické formy v daném vektoru vypočte jako součet druhých mocnin souřadnic tohoto vektoru (kladné hodnoty) násobených diagonálními prvky. Například kvadratická forma z příkladu 1

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} = 1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2 + 1 \cdot x_3^2 > 0$$

pro libovolný vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

Není-li matice kvadratické formy v *diagonálním (kanonickém) tvaru*, můžeme se pokusit upravit formu na *diagonální (kanonický) tvar*, ze kterého lze obor hodnot poznat.

10.4 Diagonální tvar matice kvadratické formy

Například *doplňováním čtverců* formy $Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$ dostaneme pro $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$

$$Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = -2\Big(x_1^2 - 2x_1(\frac{1}{2}x_2) + (\frac{1}{2}x_2)^2\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}x_2^2 - 3x_2^2 = -2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{5}{2}x_2^2 = -2y_1^2 - \frac{5}{2}y_2^2,$$

takže $Q(\mathbf{x}) < 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

Zapíšeme si substituci $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2, y_2 = x_2$ ve tvaru $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ s

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jelikož $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{S}}$, kde $\mathcal{S} = (\mathbf{s}_1^{\mathbf{I}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{I}})$ je standardní báze $\mathbb{R}^2$ a označíme-li $\mathbf{y} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$ v nové bázi $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, která je určena maticí zpětného přechodu $\mathbf{T}$ od $\mathcal{E}$ k $\mathcal{S}$, pak platí

$$[Q]_{\mathcal{S}} = \mathbf{T}^\top [Q]_{\mathcal{E}} \mathbf{T}.$$

To lze ověřit:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10.4 Diagonální tvar matice kvadratické formy

K matici zpětného přechodu $\mathbf{T}$ můžeme určit matici přechodu $\mathbf{S}$ od báze $\mathcal{S}$ k bázi $\mathcal{E}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kterou můžeme také zapsat ve tvaru $\mathbf{S} = \big[[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{S}}, [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{S}}\big]$.
Odtud

$$\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{S}} = \left[\mathbf{s}_1^{\mathbf{S}}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{S}} = \left[\mathbf{s}_2^{\mathbf{S}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jelikož Q je kvadratická forma příslušná symetrické bilineární formě

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2,$$

můžeme ověřit výpočtem, že

$$B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -2, \quad B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0, \quad B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -\frac{5}{2},$$

tedy

$$[Q]_{\mathcal{E}} = [Q_B]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

10.5 Pozitivně definitní formy

DEFINICE 2
Kvadratická forma Q na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ se nazývá *pozitivně definitní*, jestliže pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $Q(\mathbf{x}) > 0$. Jestliže pro libovolné $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ platí $Q(\mathbf{x}) \geq 0$, pak se Q nazývá *pozitivně semidefinitní*.

PŘÍKLAD 4 Kvadratická forma z příkladu 1 je pozitivně definitní.

PŘÍKLAD 5 Kvadratická forma $-Q$ definovaná na $\mathbb{R}^2$ předpisem $Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$ je pozitivně definitní.

PŘÍKLAD 6 Kvadratická forma z příkladu 3 nabývá pouze nezáporných hodnot, avšak $Q(f) = 0$ například pro nenulovou funkci $f(x) = (x-1)(x-2)$. Kvadratická forma je proto pouze pozitivně semidefinitní.

10.5 Pozitivně definitní formy

LEMMA 2 Je-li $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze s bází $\mathcal{E}$ a je-li Q je pozitivně definitní kvadratická forma, pak pro libovolné $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} \neq \mathbf{o}$ a

$$Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}^{\top} [Q]_{\mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} > 0.$$

DEFINICE 3
Každou symetrickou matici $\mathbf{A}$ budeme nazývat *pozitivně definitní*, jestliže pro každý sloupcový vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ platí $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, a *pozitivně semidefinitní*, jestliže $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro libovolný sloupcový vektor $\mathbf{x}$.

Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní (semidefinitní), právě když je její matice v libovolné bázi pozitivně definitní (semidefinitní).

10.5 Pozitivně definitní formy

LEMMA 3 Každá pozitivně definitní matice má kladnou diagonálu.

Je-li $\mathbf{D}$ diagonální matice s diagonálními prvky $d_1, \ldots, d_n$ a $\mathbf{x} = [x_i]$, pak

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{D}\mathbf{x} = d_1 x_1^2 + \cdots + d_n x_n^2.$$

Matice $\mathbf{D}$ je tedy pozitivně definitní, právě když $d_1 > 0, \ldots, d_n > 0$. Symetrická matice kongruentní s diagonální maticí je pozitivně definitní (semidefinitní), právě když tato diagonální matice má kladné (nezáporné) diagonální prvky.

Kvadratická forma Q resp. matice $\mathbf{A}$ se nazývá *negativně definitní (semidefinitní)*, právě když je $-Q$, resp. $-\mathbf{A}$ pozitivně definitní (semidefinitní). Nesplňuje-li ani jednu z uvedených vlastností, pak se nazývá *indefinitní*.

10.6 Kongruence symetrické a diagonální matice

Pro další studium kongruencí použijeme elementární řádkové operace a jejich maticový zápis. Ke každé elementární operaci však budeme následně uvažovat její sloupcovou variantu a místo o elementárních operacích budeme mluvit o *elementárních kongruencích*.

Je-li tedy $\mathbf{T}$ matice některé elementární operace s řádky čtvercové matice $\mathbf{A}$, pak matici upravenou příslušnou elementární kongruencí lze zapsat ve tvaru $\mathbf{TAT}^\top$.

10.6 Kongruence symetrické a diagonální matice

VĚTA 3

Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je symetrická matice. Pak existuje regulární matice $\mathbf{T}$ a diagonální matice $\mathbf{D}$ tak, že

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^\top = \mathbf{D}.$$

10.6 Kongruence symetrické a diagonální matice

PŘÍKLAD 9 Najděte regulární matici $\mathbf{T}$ a diagonální matici $\mathbf{D}$ tak, aby pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

platilo

$$\mathbf{TAT}^\top = \mathbf{D}.$$

ŘEŠENÍ: Matici $\mathbf{A}$ nejprve upravíme na diagonální tvar pomocí elementárních kongruencí.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} +\mathrm{r}_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} +\mathrm{s}_2 & & \end{matrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \end{matrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} & -\frac{1}{2}\mathrm{s}_1 & -\frac{1}{2}\mathrm{s}_1 \end{matrix} \end{array} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{r}_2 \end{matrix} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} & & +\mathrm{s}_2 \end{matrix} \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10.6 Kongruence symetrické a diagonální matice

PŘÍKLAD 9 *(Pokračování)*

Matici $\mathbf{T}$ najdeme tak, že řádkové operace, které jsme použili k úpravě $\mathbf{A}$, postupně provedeme na jednotkové matici.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} +\mathrm{r}_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_1 \end{matrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{r}_2 \end{matrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}.$$

Snadno si ověříme, že platí

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{\top} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

10.6 Kongruence symetrické a diagonální matice

Důsledek: Nechť Q je libovolná kvadratická forma na vektorovém prostoru konečné dimenze. Pak existuje báze $\mathcal{F}$ prostoru $\mathcal{V}$ tak, že $[Q]_{\mathcal{F}}$ je diagonální.

Tzn. je-li $\mathcal{F}$ báze $\mathcal{V}$ definovaná maticí přechodu $\mathbf{S}$, pak platí $[Q]_{\mathcal{F}} = \mathbf{S}^\top [Q]_{\mathcal{E}} \mathbf{S} = \mathbf{D}$.

10.7 Zákon setrvačnosti kvadratických forem

VĚTA 4

Nechť $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ jsou diagonální matice řádu n s diagonálami $d_1, \ldots, d_n$ a $e_1, \ldots, e_n$. Nechť $\mathbf{T}$ je regulární a $\mathbf{D} = \mathbf{T}^\top \mathbf{E} \mathbf{T}$. Pak počet kladných, záporných i nulových prvků na diagonálách obou matic je shodný.