
1. Matice a maticové operace

Matice a maticové operace

1. Aritmetické vektory
2. Operace s aritmetickými vektory
3. Nulový a opačný vektor
4. Matice
5. Násobení matice skalárem a sčítání matic
6. Nulová matice a odečítání matic
7. Transponované matice
8. Násobení matice a vektoru
9. Násobení matic
10. Blokované matice

1.1 Aritmetické vektory

DEFINICE 1

n -rozměrný *aritmetický vektor* je uspořádaná n -tice čísel, jejíž prvky se nazývají *složky*. Tyto uspořádané n -tice budeme zapisovat do hranatých závorek do řádků nebo sloupců.

PŘÍKLAD 1 Vektor průhybů vodiče z příkladu III z úvodní přednášky můžeme definovat předpisem

$\mathbf{u} = [u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]$. Řešením úlohy je pak vektor $\mathbf{u} = [0, 0.2780, 0.4448, 0.5004, 0.4448, 0.2780, 0]$

1.1 Aritmetické vektory

Jestliže \mathbf{v} je aritmetický vektor, pak i -tou složku vektoru \mathbf{v} budeme značit $[\mathbf{v}]_i$. Např. $[\mathbf{u}]_1 = u_0 = 0$.

Počet složek aritmetického vektoru nazýváme jeho *rozměrem* nebo též *dimenzí*. Například vektor $\mathbf{x} = [1, 2]$ je dvourozměrný, vektor \mathbf{u} je sedmírozměrný.

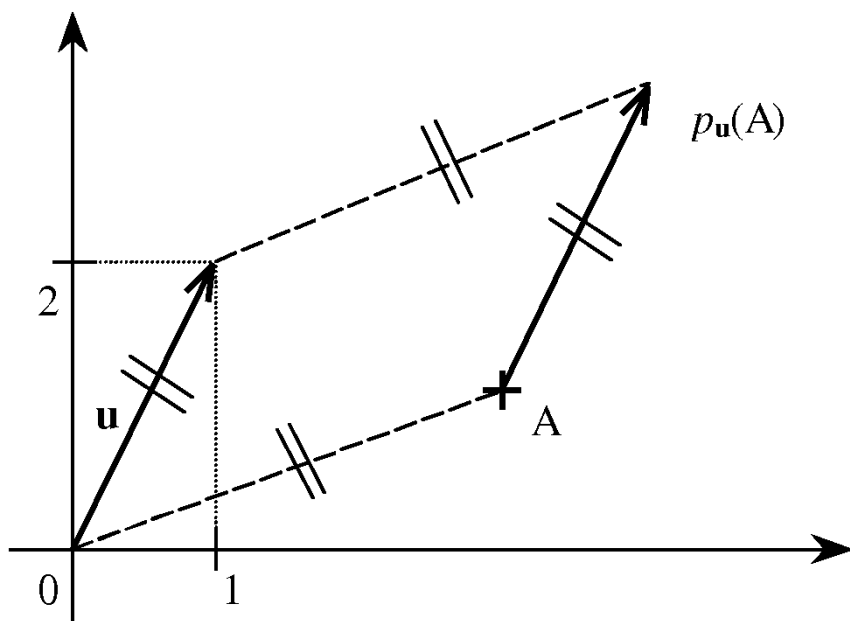
DEFINICE 2

Dva aritmetické vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} považujeme za *stejné* (píšeme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$), jestliže mají stejnou dimenzi n a stejné odpovídající složky, tj. $[\mathbf{u}]_1 = [\mathbf{v}]_1, \dots, [\mathbf{u}]_n = [\mathbf{v}]_n$. Vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} , které nejsou stejné, jsou *různé* (píšeme $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$).

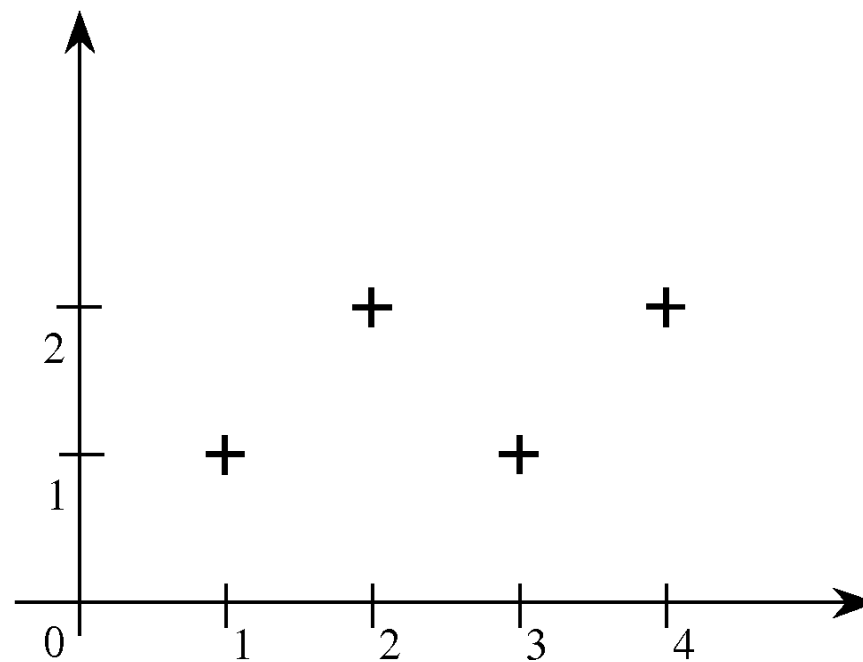
Jestliže $\mathbf{u} = [1, 2]$ a $\mathbf{v} = [2, 1]$, pak $[\mathbf{u}]_1 = 1$, $[\mathbf{v}]_1 = 2$, takže $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

1.1 Aritmetické vektory

Dvou a třírozměrné vektory Vícerozměrné vektory:
- *polohové vektory*



Volné a vázané vektory



Znázornění vektoru $[1, 2, 1, 2]$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 3

Součin skaláru (čísla) α a aritmetického vektoru $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]$ je vektor $\alpha\mathbf{u}$ definovaný předpisem

$$\alpha\mathbf{u} = [\alpha u_1, \dots, \alpha u_n].$$

Pro složky $\alpha\mathbf{u}$ tedy platí

$$[\alpha\mathbf{u}]_i = \alpha[\mathbf{u}]_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

například

$$3[1, 2] = [3 \cdot 1, 3 \cdot 2] = [3, 6],$$

$$[3[1, 2]]_1 = 3 \cdot 1 = 3, \quad [3[1, 2]]_2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

DEFINICE 4

Součet aritmetických vektorů $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]$ a $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_n]$ stejné dimenze je vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ definovaný předpisem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n].$$

Pro složky $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ tedy platí

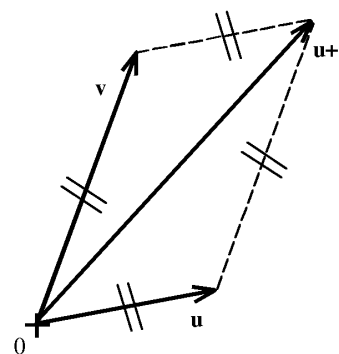
$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_i = [\mathbf{u}]_i + [\mathbf{v}]_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Například

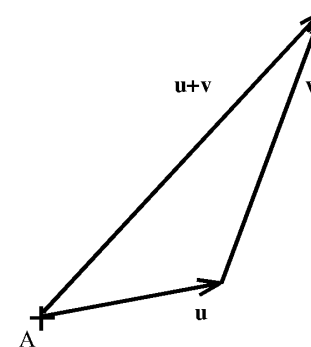
$$[1, 2] + [2, 3] = [1 + 2, 2 + 3] = [3, 5],$$

$$[[1, 2] + [2, 3]]_1 = 1 + 2 = 3,$$

$$[[1, 2] + [2, 3]]_2 = 2 + 3 = 5.$$



a) Vázané vektory



b) Volné vektory

1.2 Operace s aritmetickými vektory

VĚTA 1

Pro libovolná čísla α, β a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ stejné dimenze platí:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad (1)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \quad (3)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u} \quad (4)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \quad (5)$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (6)$$

DŮKAZ: (6) $[1u]_i = 1[u]_i = [u]_i$

1.2 Operace s aritmetickými vektory

Vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými vektory.

Např. stokrát výpočet $2.0\mathbf{u} + 2.0\mathbf{v}$ s vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} dimenze 10000000 zabírá 45.158897 sekund, zatímco výpočet $2.0(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ pouze 26.779861 sekund.

Operace $\alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ totiž potřebuje $2n$ operací násobení skaláru se složkami obou vektorů a n operací součtů složek vektorů, tj. celkem $3n$ operací, výraz $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ potřebuje n při součtu obou vektorů a n operací násobení složek vektorů skalárem, tj. celkem $2n$ operací, tedy pouze $\frac{2}{3}$ původního počtu operací.

1.3 Nulový a opačný vektor

DEFINICE 5

Vektor $\mathbf{o} = [0, \dots, 0]$ se nazývá *nulový vektor*. Nulový vektor dimenze n budeme značit \mathbf{o}_n .

Je-li vektor $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]$ libovolný aritmetický vektor, pak se vektor $-\mathbf{u} = [-u_1, \dots, -u_n] = (-1)\mathbf{u}$ nazývá *opačný vektor* k vektoru \mathbf{u} .

Je-li \mathbf{u} libovolný n -rozměrný vektor, pak $\mathbf{u} + \mathbf{o}_n = \mathbf{u}$.

Opačný vektor splňuje $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

Jestliže \mathbf{u} a \mathbf{v} jsou libovolné aritmetické vektory stejné dimenze, pak jediný vektor \mathbf{x} , který splňuje $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{v}.$$

Rozdíl aritmetických vektorů: $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$

1.4 Matice

DEFINICE 6

Nechť jsou dány prvky $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ z dané množiny \mathcal{F} . *Matice* typu (m, n) (stručně $m \times n$ matice) je obdélníková tabulka

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

která má mn prvků a_{ij} uspořádaných do m řádků $\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}$ a n sloupců $\mathbf{s}_j^{\mathbf{A}}$, takže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = [\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}],$$
$$\mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} = [a_{i1}, \dots, a_{in}], \quad \mathbf{s}_j^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Stručně píšeme též $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

1.4 Matice

- Prvky množiny \mathcal{F} nazýváme také *skaláry* (lze je sčítat a násobit obdobně jako čísla).
- Množinu všech matic typu (m, n) s prvky z množiny \mathcal{F} budeme značit $\mathcal{F}^{m,n}$. (Matice reálné, komplexní, polynomiální).
- Jestliže $m = n$, pak se \mathbf{A} nazývá *čtvercová matice* řádu n .
- Matici typu $(1, n)$ nazýváme *řádkovým vektorem* řádu n .
- Matici typu $(m, 1)$ nazýváme *sloupcovým vektorem* řádu m .
- Prvky a_{11}, \dots, a_{ss} , $s = \min\{m, n\}$ tvoří *diagonálu* matice \mathbf{A} .
- Prvek v i -tém řádku a j -tém sloupci matice \mathbf{A} značíme $[\mathbf{A}]_{ij}$.

1.4 Matice

Matice z příkladu I z úvodní přednášky:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reálná matice typu (7,8), tj. $A \in \mathbb{R}^{7,8}$.
- Diagonála: 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0.
- $[A]_{63} = 1$.

Matice z příkladu III z úvodní přednášky:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Reálná čtvercová matice řádu 5, tj. $A \in \mathbb{R}^{5,5}$.
- Diagonála: 2, 2, 2, 2, 2.
- $[A]_{43} = -1$.

1.4 Matice

DEFINICE 7

Matice \mathbf{A} a \mathbf{B} považujeme za *stejné* (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), jestliže jsou stejného typu a mají stejné odpovídající prvky, tj. $[\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{B}]_{ij}$. Matice \mathbf{A} a \mathbf{B} , které nejsou stejné, jsou *různé* (píšeme $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$).

PŘÍKLAD 2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq [1, 2], \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.5 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 8

Součin skaláru α a matice \mathbf{A} je matice $\alpha\mathbf{A}$ stejného typu jako \mathbf{A} definovaná předpisem

$$[\alpha\mathbf{A}]_{ij} = \alpha[\mathbf{A}]_{ij}.$$

PŘÍKLAD 3

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.5 Násobení matice skalárem a sčítání matic

DEFINICE 9

Součet matic \mathbf{A} a \mathbf{B} stejného typu je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ stejného typu jako \mathbf{A} a \mathbf{B} definovaná předpisem

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{B}]_{ij}.$$

PŘÍKLAD 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.5 Násobení matice skalárem a sčítání matic

VĚTA 2

Pro libovolné číselné matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} stejného typu a pro libovolné skaláry α, β platí vztahy:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (2)$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \quad (3)$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \quad (4)$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} \quad (5)$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (6)$$

DŮKAZ: (6) $[1A]_{ij} = 1[A]_{ij} = [A]_{ij}$

1.5 Násobení matice skalárem a sčítání matic

Obdobně jako v případě vektorů, vlastnosti (3),(4),(5) jsou velmi důležité při výpočtech s velmi velkými maticemi.

Např. stokrát výpočet $2.0\mathbf{A} + 3.0\mathbf{A}$ s čtvercovou maticí řádu 1000 potřebuje 4.562711 sekund, zatímco výpočet $(2.0 + 3.0)\mathbf{A}$ pouze 1.895391 sekund.

Operace $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$ se čtvercovou maticí řádu n totiž potřebuje $2n^2$ operací násobení skalárů se složkami matice a n^2 operací součtů složek matic, tj. celkem $3n^2$ operací, výraz $(\alpha + \beta)\mathbf{A}$ potřebuje 1 při součtu obou skalárů a n^2 operací násobení složek matice skalárem, tj. celkem $n^2 + 1$ operací, tedy pouze $\frac{1}{3}$ původního počtu operací.

1.6 Nulová matice a odečítání matic

DEFINICE 10

Matice

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

se nazývá *nulová matice*. Nulová matice typu (m, n) se značí \mathbf{O}_{mn} .

Je-li \mathbf{A} libovolná matice, pak matice $-\mathbf{A}$ se nazývá *opačná matice* k matici \mathbf{A} a platí

$$[-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij}$$

1.6 Nulová matice a odečítání matic

VĚTA 3

Pro libovolnou matici \mathbf{A} a nulovou matici stejného typu platí

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O} \quad (2)$$

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A} \quad (3)$$

DŮKAZ:

$$(1): [\mathbf{A} + \mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [\mathbf{O}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + 0 = [\mathbf{A}]_{ij},$$

(2):

$$[\mathbf{A} + (-\mathbf{A})]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + [-\mathbf{A}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij} + (-[\mathbf{A}]_{ij}) = 0 = [\mathbf{O}]_{ij},$$

$$(3): [-\mathbf{A}]_{ij} = -[\mathbf{A}]_{ij} = (-1)[\mathbf{A}]_{ij} = [(-1)\mathbf{A}]_{ij}.$$

1.6 Nulová matice a odečítání matic

Jestliže matice \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou libovolné matice stejného typu, pak jedinou matici \mathbf{X} , která splňuje $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$, lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{B}.$$

Definujeme *odečítání matic* nebo též *rozdíl matic* předpisem

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}).$$

PŘÍKLAD 5

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.7 Transponované matice

DEFINICE 11

K dané matici \mathbf{A} typu (m, n) definujeme matici transponovanou \mathbf{A}^\top typu (n, m) předpisem

$$[\mathbf{A}^\top]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji}.$$

PŘÍKLAD 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

VĚTA 4

Pro matice stejného typu a libovolný skalár platí:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top, \quad (1)$$

$$(\alpha\mathbf{A})^\top = \alpha\mathbf{A}^\top. \quad (2)$$

1.8 Násobení matice a vektoru

Soustava z příkladu III z úvodní přednášky:

$$\begin{array}{rcccccc} 2u_1 & -u_2 & & & & = & 0.1112 \\ -u_1 & +2u_2 & -u_3 & & & = & 0.1112 \\ & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & & = & 0.1112 \\ & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & = & 0.1112 \\ & & & -u_4 & +2u_5 & = & 0.1112 \end{array}$$

S využitím definice násobení vektoru skalárem a součtu vektorů:

$$u_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + u_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \end{bmatrix}$$

1.8 Násobení matice a vektoru

Předchozí rovnici lze přepsat:

$$u_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + u_2 \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}} + u_3 \mathbf{s}_3^{\mathbf{A}} + u_4 \mathbf{s}_4^{\mathbf{A}} + u_5 \mathbf{s}_5^{\mathbf{A}} = \mathbf{b} \quad (*)$$

Ze sloupcových vektorů $\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \dots, \mathbf{s}_5^{\mathbf{A}}$ sestavíme matici

$$\mathbf{A} = [\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_3^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_4^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_5^{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Levá strana rovnice (*) definuje součin matice \mathbf{A} a vektoru \mathbf{u} , takže

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \\ 0.1112 \end{bmatrix}$$

1.8 Násobení matice a vektoru

DEFINICE 12

Součinem matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu (m, n) a sloupcového vektoru $\mathbf{x} = [x_i]$ dimenze n nazýváme vektor dimenze m definovaný předpisem

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = x_1 \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} + \cdots + x_n \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}.$$

Rozepsáním definice po složkách dostaneme

$$[\mathbf{y}]_i = [\mathbf{Ax}]_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{x}.$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{array}{c} \mathbf{y} \\ \left[\begin{array}{c} y_i \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] \end{array} \downarrow$$

1.8 Násobení matice a vektoru

Jako příklady násobení matice a vektoru si uveďme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

VĚTA 5

Pro libovolné matice \mathbf{A} , \mathbf{B} typu (m, n) , n -rozměrné vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} a skalár α platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3)$$

DŮKAZ: (2) $[\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v})]_i = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a_{i1}(u_1 + v_1) + \cdots + a_{in}(u_n + v_n) =$
 $= (a_{i1}u_1 + \cdots + a_{in}u_n) + (a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n) =$
 $= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{u} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}}\mathbf{v} = [\mathbf{A}\mathbf{u}]_i + [\mathbf{A}\mathbf{v}]_i,$

1.9 Násobení matic

\mathbf{A} , \mathbf{B} libovolné čtvercové matice řádu 3, \mathbf{x} vektor dimenze 3.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{A} [x_1\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}] = x_1\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} + x_2\mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}} + x_3\mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}$$

Odtud můžeme definovat matici $\mathbf{AB} = [\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_2^{\mathbf{B}}, \mathbf{A}\mathbf{s}_3^{\mathbf{B}}]$.

DEFINICE 13

Jestliže \mathbf{A} je matice typu (m, p) a \mathbf{B} je matice typu (p, n) , pak *součin matic* \mathbf{A} a \mathbf{B} je matice \mathbf{AB} typu (m, n) definovaná předpisem

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{A}\mathbf{s}_1^{\mathbf{B}}, \dots, \mathbf{A}\mathbf{s}_n^{\mathbf{B}}] .$$

1.9 Násobení matic

Rozepíšeme-li si definici násobení matic po složkách, dostaneme

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}}$$

a

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_1^{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_n^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^{\mathbf{A}} \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Toto pravidlo si můžeme znázornit pomocí:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AB} & & \mathbf{A} \quad \mathbf{B} \\ \left[\begin{array}{c} [AB]_{ij} \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{ccc} a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \longrightarrow & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{array} \right] \downarrow \end{array}$$

1.9 Násobení matic

PŘÍKLAD 7 Příklady násobení matic:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{nelze násobit!!!}$$

1.9 Násobení matic

Z definice lze ihned vidět, že pro libovolné matice \mathbf{A} , \mathbf{B} a vektor \mathbf{x} je $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}$ pokud jsou tyto výrazy definovány. Obecněji platí následující vztahy.

VĚTA 6

Pro libovolný skalár α a matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} platí:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C} \quad (3)$$

kdykoliv jsou uvedené výrazy definovány.

DŮKAZ (2):
$$\begin{aligned} [A(B + C)]_{ij} &= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}+\mathbf{C}} = \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} (\mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} + \mathbf{s}_j^{\mathbf{C}}) = \\ &= \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_j^{\mathbf{B}} + \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_j^{\mathbf{C}} = [\mathbf{A}\mathbf{B}]_{ij} + [\mathbf{A}\mathbf{C}]_{ij} \end{aligned}$$

1.9 Násobení matic

Násobení matic je velmi výpočetně nákladné. Je proto velmi důležité operace dělat co nejefektivněji.

Např. stokrát výpočet $\mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ s čtvercovými maticemi řádu 1000 potřebuje 87.314541 sekund, zatímco výpočet $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$ pouze 45.531831 sekund.

Operace násobení matic se čtvercovými maticemi řádu n totiž potřebuje $n^2(2n - 1) = 2n^3 - n^2$ operací, tj. výraz $\mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ potřebuje $4n^3 - 2n^2$ při součinech matic a n^2 operací pro součet matic, tj. celkem $4n^3 - n^2$ operací, zatímco výraz $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$ potřebuje $2n^3$ tedy přibližně $\frac{1}{2}$ původního počtu operací.

1.9 Násobení matic

VĚTA 7

Pro násobení matice \mathbf{A} typu (m, p) , matice \mathbf{B} typu (p, q) a matice \mathbf{C} typu (q, n) platí také tzv. *asociativní zákon*, tj.

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

DŮKAZ:
$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \mathbf{A} [\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \dots, \mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}] = [\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}), \dots, \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}})] = \\ &= [(\mathbf{AB})\mathbf{s}_1^{\mathbf{C}}, \dots, (\mathbf{AB})\mathbf{s}_n^{\mathbf{C}}] = (\mathbf{AB})\mathbf{C}. \end{aligned}$$

Indukcí lze dokázat obdobné tvrzení i pro součin více než tří matic.

Odtud speciálně vyplývá, že *mocnina čtvercové matice*

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_k$$

je definována jednoznačně neboť nezáleží na uzávorkování.

1.9 Násobení matic

DEFINICE 14

Čtvercová matice

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

se nazývá *jednotková matice*. Jednotková matice řádu n se značí \mathbf{I}_n .

VĚTA 8

Jestliže \mathbf{A} je libovolná matice, pak pro jednotkové matice příslušné dimenze platí

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

DŮKAZ:

$$\text{Např. } [AI]_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + \dots + a_{ij} \cdot 1 + \dots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij} = [A]_{ij}$$

1.9 Násobení matic

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

platí

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

takže $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Navíc platí

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Pro násobení matic tedy *neplatí komutativní zákon* a *mocnina nenulové matice může být nulová matice!*

1.9 Násobení matic

VĚTA 9

Jestliže je \mathbf{A} matice typu (m, p) a \mathbf{B} je matice typu (p, n) , pak platí:

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{AB})^\top]_{ij} &= [\mathbf{AB}]_{ji} = \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \mathbf{s}_i^{\mathbf{B}} = \\ &= a_{j1}b_{1i} + \cdots + a_{jp}b_{pi} = \\ &= b_{1i}a_{j1} + \cdots + b_{pi}a_{jp} = \\ &= (\mathbf{s}_i^{\mathbf{B}})^\top (\mathbf{r}_j^{\mathbf{A}})^\top = [\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top]_{ij}. \end{aligned}$$

1.10 Blokové matice

Pomocí vhodně zvolených horizontálních či vertikálních čar můžeme rozdělit matice na *submatice* nebo *bloky*. Například následující matici typu $(3, 4)$ můžeme rozdělit na čtyři bloky

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{array} \right].$$

Matice, jejichž prvky jsou uspořádány do bloků, nazýváme *blokové matice*.

Pro blokové matice používáme obdobnou terminologii jako pro běžné matice, takže mluvíme o *blokové diagonále* nebo o *blokových řádcích*.

1.10 Blokové matice

Operace s blokovými maticemi lze provádět po blocích jak popisuje následující věta. Tohoto lze využít při paralelních výpočtech.

VĚTA 10

Jestliže jsou blokové matice \mathbf{A} a \mathbf{B} rozděleny stejným způsobem na bloky, pak platí:

$$\alpha \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{C} & \alpha \mathbf{D} \\ \alpha \mathbf{E} & \alpha \mathbf{F} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{P} & \mathbf{D} + \mathbf{Q} \\ \mathbf{E} + \mathbf{R} & \mathbf{F} + \mathbf{S} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^\top & \mathbf{E}^\top \\ \mathbf{D}^\top & \mathbf{F}^\top \end{bmatrix}$$

1.10 Blokové matice

Blokové matice jsou základním prostředkem pro paralelizaci výpočtů. Předpokládejme, že máme následující blokové matice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{W} \\ \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

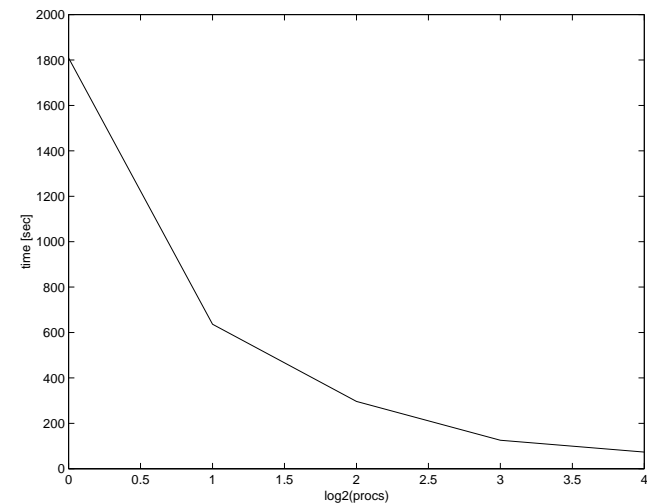
Řešení úlohy $\mathbf{Z} = \mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ lze pak řešit po blocích následovně

Procesor 1 $\mathbf{V} = \mathbf{C} + \alpha\mathbf{P}$, bloky C, P

Procesor 2 $\mathbf{W} = \mathbf{D} + \alpha\mathbf{Q}$, bloky D, Q

Procesor 3 $\mathbf{X} = \mathbf{E} + \alpha\mathbf{R}$, bloky E, R

Procesor 4 $\mathbf{Y} = \mathbf{F} + \alpha\mathbf{Q}$, bloky F, Q



Algoritmy, u kterých výpočetní čas přímo úměrně klesá s počtem procesorů, se nazývají *paralelně škálovatelné*.

1.10 Blokové matice

VĚTA 11

Jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \cdots & \mathbf{A}_{np} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \cdots & \mathbf{B}_{pn} \end{bmatrix}$$

jsou dvě blokové matice rozdělené na bloky tak, že počet sloupců bloků \mathbf{A}_{ik} je stejný jako počet řádků bloků \mathbf{B}_{kj} , pak se libovolný blok \mathbf{C}_{ij} součinu \mathbf{AB} vyčíslí podle pravidla

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j} + \cdots + \mathbf{A}_{ip}\mathbf{B}_{pj}.$$

Speciálně pro násobení blokové matice a blokového vektoru platí:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{C}\mathbf{z} \\ \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{E}\mathbf{z} \end{bmatrix}.$$

1.10 Blokové matice

Násobení blokových matic lze taktéž paralelizovat, avšak situace je komplikovanější:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{W} \\ \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

Řešení úlohy $\mathbf{Z} = \mathbf{AB}$ lze pak řešit po blocích následovně

Procesor 1 $\mathbf{V} = \mathbf{CP} + \mathbf{DR}$, bloky C, D, P, R

Procesor 2 $\mathbf{W} = \mathbf{CQ} + \mathbf{DS}$, bloky C, D, Q, S

Procesor 3 $\mathbf{X} = \mathbf{EP} + \mathbf{FR}$, bloky E, F, P, R

Procesor 4 $\mathbf{Y} = \mathbf{EQ} + \mathbf{FS}$, bloky E, F, Q, S

V tomto případě je však paralelizace více problematická, neboť jednotlivé procesy navzájem sdílejí přístup k maticím.

1.10 Blokové matice

Výhodně lze paralelizovat násobení matice a vektoru:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

Řešení úlohy $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{v}$ lze pak řešit po blocích následovně

Procesor 1 $\mathbf{z}_1 = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y}$, bloky B, C

Procesor 2 $\mathbf{z}_2 = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{y}$, bloky D, E

1.10 Blokové matice

Specifickým případem jsou tzv. *blokově diagonální matice*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

Řešení úlohy $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{v}$ lze pak řešit ještě výhodněji po blocích následovně:

Procesor 1 $\mathbf{z}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{v}_1$, blok A_1

Procesor 2 $\mathbf{z}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{v}_2$, blok A_2

⋮

Procesor n $\mathbf{z}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{v}_n$, blok A_n

