Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 1

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$\begin{aligned} U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 0\}, \\ V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 > 0\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A}: \ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([2, 1, 0]) &= [1, -1], \\ \mathcal{A}([2, 2, 1]) &= [-1, 2], \\ \mathcal{A}([-1, -1, -1]) &= [2, -1]. \end{aligned}$$

   Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

   ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ x_2 - x_4 &= 3, \\ x_3 - x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 2

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 2x_4 &= -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 &= 5, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= -3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 &= 3. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}(Au + Bv)$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 6 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x + y + 2z = 0 \wedge x + y - 1 = 0\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x + y + z = 0 \wedge 2x + y - z = 0\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} :\ \mathcal{P}_3 \mapsto \mathbb{R}^2$ ($\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(-2x^2 + x + 2) &= [1, 1], \\ \mathcal{A}(-2x^2 + 1) &= [-1, -2], \\ \mathcal{A}(-x^2 + x + 1) &= [-2, -5]. \end{aligned}$$

Nalezněte všechny vzory vektoru $[1, 3]$.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 0, 0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 0]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [0, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} -2x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 4, \\ -2x_1 + x_3 - x_4 &= -4. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 3

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 &= -6, \\ -x_1 - 2x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -4. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A(A^{-1} + B^{-1})u$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ -7 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$), kde

$$\begin{aligned} U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 \colon\ a_2 = a_1\}, \\ V &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 \colon\ a_2 = a_0^2\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} :\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([2,-2,-1]) &= [1,1], \\ \mathcal{A}([1,-1,-1]) &= [-1,-2], \\ \mathcal{A}([-3,2,0]) &= [2,1]. \end{aligned}$$

   Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1,0,0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [0,1,1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [1,0,1]$$

   ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 3x_3 + 2x_4 &= 19, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 12. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 4

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 20, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 26, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 28, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 26. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A\left(A^{-1}u + Bu\right)$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \; x = y\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \; \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je definováno obrazy báze

$$\mathcal{A}([1, 1, 0]) = [1, 0, 1],$$
$$\mathcal{A}([0, 1, 1]) = [1, 1, 1],$$
$$\mathcal{A}([0, 0, 1]) = [1, 0, 0].$$

Nalezněte obraz vektoru $[1, 2, 3]$.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 4, \\ 3x_1 + x_4 &= 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 8, \\ x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 5

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 11, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 16. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $(A + B^2)\, B^{-1} u$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ y = z\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \geq 3\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} :\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je definováno obrazy báze

$$\mathcal{A}([1, 1, 2]) = [1, 1, 0],$$
$$\mathcal{A}([2, 0, 1]) = [0, 1, 1],$$
$$\mathcal{A}([1, 0, 0]) = [1, 0, 1].$$

   Nalezněte vzor vektoru $[6, 5, 5]$.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [2, -1, 0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [-1, 2, -1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [0, -1, 2]$$

   ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 3, \\ 3x_1 + x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1, \\ x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 6

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 11, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}\left(AB + AB^{-1}\right)Bu$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x = z\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 > -x^2 - y^2 - z^2\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} :\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je definováno obrazy báze

$$\mathcal{A}([1, 2, 2]) = [1, 0, 0],$$
$$\mathcal{A}([2, 3, 3]) = [1, 1, 0],$$
$$\mathcal{A}([2, 3, 4]) = [1, 1, 1].$$

Nalezněte obraz vektoru $[7, 11, 12]$.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [2, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [3, 2, 0]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 3x_1 + x_4 &= 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4, \\ x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 7

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + x_4 &= 3, \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$, kde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x = -3y + 1\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x = -y \wedge 2x - 4z = -6y \wedge y + 2z = x\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} :\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([1, 0, 1]) &= [1, 2], \\ \mathcal{A}([0, 0, 1]) &= [0, 1], \\ \mathcal{A}([1, 2, 0]) &= [3, -2]. \end{aligned}$$

   Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

   ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + x_4 &= 3, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0, \\ -2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 8

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + x_4 &= 3, \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x = -2y \wedge 3y + z = -x \wedge y + 2z = x\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x = -2y - 3z \wedge x - 4z = -3y \wedge y = x\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ je definováno obrazy báze

$$\mathcal{A}([1, 0, 2]) = [2, -1],$$
$$\mathcal{A}([0, 1, 1]) = [1, 1],$$
$$\mathcal{A}([1, 2, 2]) = [1, 2].$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [2, -1, 0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [-1, 2, -1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [0, -1, 2]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + x_4 &= 3, \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0, \\ -2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 9

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= -2, \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}Bu + A^{-1}Bv$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2y + z \wedge y + 2z = -2x \wedge y + z = -x\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x = z \wedge x + y = -2z \wedge 5z = -x - 2y\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([1, 0, 0]) &= [1, 0], \\ \mathcal{A}([1, 1, 0]) &= [0, 1], \\ \mathcal{A}([1, 1, 1]) &= [1, 1]. \end{aligned}$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{f}_2 = [2, 1, 1], \quad \mathbf{f}_3 = [3, 2, 0]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 10

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $C^{-1}Au + C^{-1}Bu$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0\colon\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$), kde

$$\begin{aligned} U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3\colon\ a_2 = 2k \wedge a_1 = 0 \wedge a_0 = 2l,\ k, l \in \mathbb{Z}\}, \\ V &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3\colon\ 2a_2 + 2a_1 + 2a_0 = 1\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A}:\ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([-1, 0, 3]) &= [1, 0, 1], \\ \mathcal{A}([2, 1, 2]) &= [2, 1, 1], \\ \mathcal{A}([1, -1, -3]) &= [0, 1, -1]. \end{aligned}$$

   Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

   ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_4 &= 2, \\ x_2 - x_3 &= 1, \\ -x_3 + x_4 &= 0, \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 11

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}C^T u - 2A^{-1}B^T u$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$), kde

$$\begin{aligned} U &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 \colon a_2 = 2k + 1 \wedge a_1 = 2l + 1 \wedge a_0 = 0, \; k, l \in \mathbb{Z}\}, \\ V &= \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 \colon a_1 + 2a_1 + 2a_0 = 0\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([-1, 0, 3]) &= [1, 0, 1], \\ \mathcal{A}([2, 1, 2]) &= [2, 1, 1], \\ \mathcal{A}([1, -1, -3]) &= [0, 1, -1]. \end{aligned}$$

Nalezněte obor hodnot zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, -1, 0], \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, -1], \quad \mathbf{f}_3 = [-1, 0, 2]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 8x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_4 &= -1, \\ 4x_2 - x_3 &= 0, \\ -x_3 + x_4 &= -1, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 12

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $2B^{-1}Au - B^{-1}Av$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$\begin{aligned} U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ 3x - 2y + z = 0\}, \\ V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x + y = 1 \wedge y + z = 1\}. \end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([-1, 0, 3]) &= [1, 0, 1], \\ \mathcal{A}([2, 1, 2]) &= [2, 1, 1], \\ \mathcal{A}([1, -1, -3]) &= [0, 1, -1]. \end{aligned}$$

   Nalezněte obraz vektoru $[5, 3, 1]$.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 0, 0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

   ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_4 &= 0, \\ -4x_2 + x_3 &= 3, \\ x_3 - x_4 &= -1, \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 13

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}Bu$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 1\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ je definováno obrazy báze

$$\mathcal{A}([1, 0, 1]) = [1, 0],$$
$$\mathcal{A}([0, 1, 1]) = [1, 1],$$
$$\mathcal{A}([0, -1, 1]) = [0, 2].$$

Nalezněte jádro zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [2, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [3, 2, 0]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_3 + x_4 &= 7 \\ -x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 14

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= -2 \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}Bu$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, 3] \in \mathbb{R}^3\},$$
$$V = \{[x, y, 0] \in \mathbb{R}^3\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([1, 0, 1]) &= [1, 1, 1], \\ \mathcal{A}([0, 1, 1]) &= [1, 1, -1], \\ \mathcal{A}([0, -1, 1]) &= [0, 0, 4]. \end{aligned}$$

   Nalezněte obor hodnot tohoto zobrazení.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

   ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_3 + x_4 &= -1. \end{aligned}$$