

Cvičení č. 9

Bilineární formy. Matice bilineární formy. Kvadratické formy. Matice kvadratické formy.

Bilineární formy**Definice:**Zobrazení $B : V \times V \rightarrow R$, kde V je reálný vektorový prostor se nazývá bilineární forma, jestliže

1. $\forall u, v, w \in V : B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$
2. $\forall \alpha \in R \forall u, v \in V : B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v)$
3. $\forall u, v, w \in V : B(u, v + w) = B(u, v) + B(u, w)$
4. $\forall \alpha \in R \forall u, v \in V : B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v)$

Bilineární forma, pro kterou platí $B(u, v) = B(v, u), \forall u, v \in V$, se nazývá symetrická a bilineární forma pro níž platí $B(u, v) = -B(v, u), \forall u, v \in V$ se nazývá antisymetrická.**Příklad:**Rozhodněte, zda-li zobrazení $B : R^3 \times R^3 \rightarrow R$ definované předpisem

$$B(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$$

je bilineární forma.

Řešení:

$$1. \forall u, v, w \in R^3 : B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$$

Zvolme $u = [u_1, u_2, u_3], v = [v_1, v_2, v_3], w = [w_1, w_2, w_3]$. Pak

$$\begin{aligned} B(u + v, w) &= (u_1 + v_1)w_1 - (u_1 + v_1)w_2 + 3(u_2 + v_2)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 - 2(u_2 + v_2)w_3 - \\ &- 2(u_3 + v_3)w_2 + 5(u_3 + v_3)w_3 = u_1 w_1 + v_1 w_1 - u_1 w_2 - v_1 w_2 + 3u_2 w_1 + 3v_2 w_1 + 2u_2 w_2 + \\ &+ 2v_2 w_2 - 2u_2 w_3 - 2v_2 w_3 - 2u_3 w_2 - 2v_3 w_2 + 5u_3 w_3 + 5v_3 w_3 = u_1 w_1 - u_1 w_2 + 3u_2 w_1 + 2u_2 w_2 - \\ &- 2u_2 w_3 - 2u_3 w_2 + 5u_3 w_3 + v_1 w_1 - v_1 w_2 + 3v_2 w_1 + 2v_2 w_2 - 2v_2 w_3 - 2v_3 w_2 + 5v_3 w_3 = \\ &= B(u, w) + B(v, w) \end{aligned}$$

$$2. \forall \alpha \in R \forall u, v \in R^3 : B(\alpha u, v) = \alpha B(u, v).$$

$$\begin{aligned} B(\alpha u, v) &= (\alpha u_1)v_1 - (\alpha u_1)v_2 + 3(\alpha u_2)v_1 + 2(\alpha u_2)v_2 - 2(\alpha u_2)v_3 - 2(\alpha u_3)v_2 + 5(\alpha u_3)v_3 = \\ &= \alpha u_1 v_1 - \alpha u_1 v_2 + 3\alpha u_2 v_1 + 2\alpha u_2 v_2 - 2\alpha u_2 v_3 - 2\alpha u_3 v_2 + 5\alpha u_3 v_3 = \alpha(u_1 v_1 - u_1 v_2 + 3u_2 v_1 + \\ &+ 2u_2 v_2 - 2u_2 v_3 - 2u_3 v_2 + 5u_3 v_3) = \alpha B(u, v) \end{aligned}$$

$$3. \forall u, v, w \in R^3 : B(u, v + w) = B(u, v) + B(u, w).$$

$$\begin{aligned} B(u, v + w) &= u_1(v_1 + w_1) - u_1(v_2 + w_2) + 3u_2(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2) - 2u_2(v_3 + w_3) - \\ &- 2u_3(v_2 + w_2) + 5u_3(v_3 + w_3) = u_1 v_1 + u_1 w_1 - u_1 v_2 - u_1 w_2 + 3u_2 v_1 + 3u_2 w_1 + 2u_2 v_2 + \\ &+ 2u_2 w_2 - 2u_2 v_3 - 2u_2 w_3 - 2u_3 v_2 - 2u_3 w_2 + 5u_3 v_3 + 5u_3 w_3 = u_1 v_1 - u_1 v_2 + 3u_2 v_1 + 2u_2 v_2 - \\ &- 2u_2 v_3 - 2u_3 v_2 + 5u_3 v_3 + u_1 w_1 - u_1 w_2 + 3u_2 w_1 + 2u_2 w_2 - 2u_2 w_3 - 2u_3 w_2 + 5u_3 w_3 = \\ &= B(u, w) + B(v, w). \end{aligned}$$

$$4. \forall \alpha \in R \forall u, v \in R^3 : B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v).$$

$$\begin{aligned} B(u, \alpha v) &= u_1(\alpha v_1) - u_1(\alpha v_2) + 3u_2(\alpha v_1) + 2u_2(\alpha v_2) - 2u_2(\alpha v_3) - 2u_3(\alpha v_2) + 5u_3(\alpha v_3) = \\ &= \alpha u_1 v_1 - \alpha u_1 v_2 + 3\alpha u_2 v_1 + 2\alpha u_2 v_2 - 2\alpha u_2 v_3 - 2\alpha u_3 v_2 + 5\alpha u_3 v_3 = \alpha(u_1 v_1 - u_1 v_2 + 3u_2 v_1 + \\ &+ 2u_2 v_2 - 2u_2 v_3 - 2u_3 v_2 + 5u_3 v_3) = \alpha B(u, v). \end{aligned}$$

Z 1., 2., 3. a 4. tedy vyplývá, že zobrazení B je bilineární forma. ♦

Příklad:

Rozhodněte, zda-li zobrazení $B: P_3 \times P_3 \rightarrow R$ definované předpisem

$$B(p, q) = p(0)q(1), \forall p, q \in P_3$$

je bilineární forma.

Řešení:

$$1. \forall p, q, r \in P_3 : B(p+q, r) = B(p, r) + B(q, r).$$

$$B(p+q, r) = (p+q)(0)r(1) = (p(0)+q(0))r(1) = p(0)r(1) + q(0)r(1) = B(p, r) + B(q, r)$$

$$2. \forall \alpha \in R \forall p, q \in P_3 : B(\alpha p, q) = \alpha B(p, q).$$

$$B(\alpha p, q) = (\alpha p)(0)q(1) = \alpha p(0)q(1) = \alpha B(p, q)$$

$$3. \forall p, q, r \in P_3 : B(p, q+r) = B(p, q) + B(p, r).$$

$$B(p, q+r) = p(0)(q+r)(1) = p(0)(q(1)+r(1)) = p(0)q(1) + p(0)r(1) = B(p, q) + B(p, r)$$

$$4. \forall \alpha \in R \forall p, q \in P_3 : B(p, \alpha q) = \alpha B(p, q).$$

$$B(p, \alpha q) = p(0)(\alpha q)(1) = p(0)\alpha q(1) = \alpha p(0)q(1) = \alpha B(p, q)$$

Zobrazení B je tedy bilineární forma. ♦

Poznámka:

Každá bilineární forma B nad V se dá napsat jako součet $B(u, v) = B_S(u, v) + B_A(u, v)$, kde

$B_S(u, v) = \frac{1}{2}(B(u, v) + B(v, u))$ je symetrická bilineární forma, která se nazývá symetrická část formy B a kde $B_A(u, v) = \frac{1}{2}(B(u, v) - B(v, u))$ je antisymetrická bilineární forma, která se nazývá antisymetrická část formy B .

Příklad:

Rozhodněte, zda-li bilineární forma $B: R^3 \times R^3 \rightarrow R$ definovaná předpisem

$$B(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3$$

je symetrická či antisymetrická, případně nalezněte její symetrickou a antisymetrickou část.

Řešení:

$$\begin{aligned} B(y, x) &= y_1 x_1 - y_1 x_2 + 3y_2 x_1 + 2y_2 x_2 - 2y_2 x_3 - 2y_3 x_2 + 5y_3 x_3 = \\ &= x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3. \end{aligned}$$

Odtud je patrné, že $B(x, y) \neq B(y, x)$ ani $B(x, y) \neq -B(y, x), \forall x, y \in R^3$. Bilineární forma tedy není ani symetrická ani antisymetrická.

Nyní určíme její symetrickou a antisymetrickou část.

$$\begin{aligned} B_S(x, y) &= \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x)) = \frac{1}{2}(x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3 + \\ &+ x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3) = \\ &= \frac{1}{2}(2x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2 - 4x_2 y_3 - 4x_3 y_2 + 10x_3 y_3) = \\ &= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_A(x, y) &= \frac{1}{2}(B(x, y) - B(y, x)) = \frac{1}{2}(x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3 - \\ &- x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 5x_3y_3) = \\ &= \frac{1}{2}(-4x_1y_2 + 4x_2y_1) = -2x_1y_2 + 2x_2y_1. \end{aligned}$$

Snadno se dá ověřit, že opravdu platí $B(u, v) = B_S(u, v) + B_A(u, v)$. ♦

Příklad:

Rozhodněte, zda-li bilineární forma B definovaná na P_3 předpisem

$$B(p, q) = p(1)q(1), \quad \forall p, q \in P_3$$

je symetrická či antisymetrická, případně nalezněte její symetrickou a antisymetrickou část.

Řešení:

$$B(q, p) = q(1)p(1) = p(1)q(1) = B(p, q), \quad \forall p, q \in P_3.$$

Odtud je patrné, že bilineární forma B je symetrická a tudíž $B_S(p, q) = p(1)q(1)$ a

$$B_A(p, q) = 0. \quad \blacklozenge$$

Matice bilineární formy**Definice:**

Nechť $E = (e_1, \dots, e_n)$ je báze vektorového prostoru V a B je bilineární forma nad tímto vektorovým prostorem. Maticí bilineární formy B nazýváme matici $[B]_E = (B(e_i, e_j))$.

Věta:

Nechť B je bilineární forma na V a nechť $[B]_E$ je matice této formy vzhledem k bázi E . Pro libovolné vektory $u, v \in V$ platí $B(u, v) = [u]_E^T [B]_E [v]_E$.

Příklad:

Je dána bilineární forma B na P_3 předpisem $B(p, q) = p(0)q(1), \forall p, q \in P_3$. Pomocí matice bilineární formy nalezněte obraz $B(p, q)$ kde $p(x) = x + 1, q(x) = x^2 + x - 1$.

Řešení:

Pro snadné nalezení souřadnic vektorů si pro tuto úlohu zvolíme bázi $P = (p_1, p_2, p_3)$,

$p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2$. Určíme souřadnice vektorů p, q :

$$[p]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [q]_P = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

neboť $p = 1p_1 + 1p_2 + 0p_3, q(x) = -1p_1 + 1p_2 + 1p_3$.

Nyní sestavíme matici bilineární formy vzhledem k bázi P .

$$B(p_1, p_1) = p_1(0)p_1(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$B(p_1, p_2) = p_1(0)p_2(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$B(p_1, p_3) = p_1(0)p_3(1) = 1 \cdot 1^2 = 1$$

$$B(p_2, p_1) = p_2(0)p_1(1) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$B(p_2, p_2) = p_2(0)p_2(1) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$B(p_2, p_3) = p_2(0)p_3(1) = 0 \cdot 1^2 = 0$$

$$B(p_3, p_1) = p_3(0)p_1(1) = 0^2 \cdot 1 = 0$$

$$B(p_3, p_2) = p_3(0)p_2(1) = 0^2 \cdot 1 = 0$$

$$B(p_3, p_3) = p_3(0)p_3(1) = 0^2 \cdot 1^2 = 0$$

$$[B]_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$B(p, q) = [p]_p^T [B]_p [q]_p = [1, 1, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1, 1, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1. \quad \blacklozenge$$

Kvadratické formy

Definice:

Nechť B je bilineární forma na V . Kvadratickou formou příslušnou bilineární formě B rozumíme zobrazení $Q_B : V \rightarrow R$ definované předpisem $Q_B(x) = B(x, x)$, $\forall x \in V$.

Příklad:

Nalezněte kvadratickou formu příslušnou k bilineární formě $B : R^3 \times R^3 \rightarrow R$ definované předpisem

$$B(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 5x_3 y_3.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} Q_B(x) &= B(x, x) = x_1 x_1 - x_1 x_2 + 3x_2 x_1 + 2x_2 x_2 - 2x_2 x_3 - 2x_3 x_2 + 5x_3 x_3 = \\ &= x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 4x_2 x_3 + 5x_3^2. \end{aligned}$$

Kvadratická forma příslušná k bilineární formě B má tedy tvar

$$Q_B(x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 4x_2 x_3 + 5x_3^2. \quad \blacklozenge$$

Věta:

Nechť Q_B je kvadratická forma na V příslušná nějaké bilineární formě B . Pak symetrická část této bilineární formy B má tvar

$$B_S(x, y) = \frac{1}{2}(Q_B(x+y) - Q_B(x) - Q_B(y)).$$

Příklad:

Určete, zda-li zobrazení $Q : R^2 \rightarrow R$, definované předpisem $Q(x) = 4x_1^2 - 4x_1 x_2 + 3x_2^2$ je kvadratická forma.

Řešení:

Abychom mohli rozhodnout zda-li Q je kvadratická forma musíme nejdříve nalézt k ní příslušnou bilineární formu, tj. takovou bilineární formu B , že $Q(x) = B(x, x)$. K tomu využijeme předchozí věty:

$$\begin{aligned} B_S(x, y) &= \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) = \\ &= \frac{1}{2}(4(x_1+y_1)^2 - 4(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 3(x_2+y_2)^2 - 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 - 4y_1^2 + 4y_1y_2 - 3y_2^2) = \\ &= \frac{1}{2}(4x_1^2 + 8x_1y_1 + 4y_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 - 4y_1y_2 + 3x_2^2 + 6x_2y_2 + 3y_2^2 - \\ &- 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 - 4y_1^2 + 4y_1y_2 - 3y_2^2) = \frac{1}{2}(8x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + 6x_2y_2) = \\ &= 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2. \end{aligned}$$

Dle definice bilineární formy se dá snadno ukázat, že

$B_S(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ je symetrická bilineární forma pro niž

$$B_S(x, x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = Q(x).$$

Zobrazení Q je tudíž kvadratickou formou. ♦

Matice kvadratické formy

Definice:

Nechť E je báze vektorového prostoru V , nechť B je bilineární forma na V a Q nechť je k ní příslušná kvadratická forma. Pak maticí kvadratické formy Q vzhledem k bázi E nazýváme matici symetrické části formy B vzhledem k bázi E , t.j. $[Q]_E = [B_S]_E$.

Věta:

Nechť Q je kvadratická forma na V a nechť $[Q]_E$ je matice této formy vzhledem k bázi E . Pro libovolný vektor $u \in V$ platí $Q(u) = [u]_E^T [Q]_E [u]_E$.

Příklad:

Nalezněte matici kvadratické formy Q z předchozího příkladu vzhledem ke standardní bázi. Pomocí této matice určete $Q(x)$, $x = [1, 2]$.

Řešení:

Pro nalezení matice kvadratické formy musíme znát symetrickou část bilineární formy k níž kvadratická forma Q přísluší. Tuto část jsme však již našli v předchozím příkladě a má tvar

$$B_S(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

Dále připomeneme, že standardní bázi $S = (s_1^I, s_2^I)$ tvoří sloupcové vektory jednotkové matice. Matice symetrické části bilineární formy příslušné ke Q má tedy složky:

$$B_S(s_1^I, s_1^I) = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 4$$

$$B_S(s_1^I, s_2^I) = 4 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 = -2 = B_S(s_2^I, s_1^I)$$

$$B_S(s_2^I, s_2^I) = 4 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

Matice kvadratické formy má tedy tvar

$$[Q]_S = [B_S]_S = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pro určení obrazu kvadratické formy potřebujeme znát souřadnice vektoru vzhledem ke standardní bázi. To je ovšem triviální neboť $[x]_S = x$.

$$Q(x) = [x]_S^T [Q]_S [u]_S = [1, 2] \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1, 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 8.$$

$$\text{Vskutku } Q(x) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 8. \quad \blacklozenge$$

Příklad:

Nalezněte matici kvadratické formy Q z předchozího příkladu vzhledem k bázi

$$E = (e_1, e_2), e_1 = [1, 1], e_2 = [1, -1].$$

Řešení:

Jak již bylo uvedeno v předchozím příkladě, musíme sestavit matici symetrické bilineární formy

$$B_S(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

$$B_S(e_1, e_1) = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

$$B_S(e_1, e_2) = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 = B_S(e_2, e_1)$$

$$B_S(e_2, e_2) = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 11$$

Matrice kvadratické formy vzhledem k bázi E má tedy tvar

$$[Q]_E = [B_S]_E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}. \quad \blacklozenge$$