Cvičení č. 7

Souřadnice vektoru a jejich využití. Hodnost matice. Frobeniova věta.

Souřadnice vektoru

Definice:
Nechť je dána báze $E=\{e_1,...,e_n\}$ vektorového prostoru *V*. $\alpha_1,...,\alpha_n$ nazýváme souřadnice vektoru $v\in V$ vzhledem k bázi *E* jestliže

$$\alpha_1 e_1+...+\alpha_n e_n=v\,.$$

Aritmetický vektor $[v]_E=[\alpha_1,...,\alpha_n]$ nazýváme souřadnicový vektor vektoru *v*.

Příklad:
Nalezněte souřadnice vektoru $v=[2,1,1]$ vzhledem ke standardní bázi E a k bázi $F=(f_1,f_2,f_3),\ f_1=[1,1,0],\ f_2=[0,1,1],\ f_3=[1,0,1]$.

$\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3=v$

$\alpha_1[1,0,0]+\alpha_2[0,1,0]+\alpha_3[0,0,1]=[2,1,1]$

$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[2,1,1],$

$\alpha_1=2,\alpha_2=1,\alpha_3=1$

Souřadnice *v* vzhledem k bázi *E* jsou $[v]_E=[2,1,1]$.

$\beta_1 f_1+\beta_2 f_2+\beta_3 f_3=v$

$\beta_1[1,1,0]+\beta_2[0,1,1]+\beta_3[1,0,1]=[2,1,1]$

$[\beta_1+\beta_3,\beta_1+\beta_2,\beta_2+\beta_3]=[2,1,1]$

Z poslední rovnice dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{array}{cccc}\beta_1 & & +\beta_3 & = & 2\\ \beta_1 & +\beta_2 & & = & 1\\ & \beta_2 & +\beta_3 & = & 1\end{array}$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\-r_1\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\\0&1&1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\-r_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\\0&0&2&2\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}\beta_1=1\\\beta_2=0\\\beta_3=1\end{array}$$

Souřadnice *v* vzhledem k bázi *F* jsou $[v]_F=[1,0,1]$. ♦

Využití souřadnic

Řešení úloh na lineární kombinace s vektory, které nejsou aritmetické a patří do vektrorového prostoru *V* s konečnou bází se dají převést na stejné úlohy s aritmetickými vektory následujícím způsobem:

1. Zvolíme bázi $E=\{e_1,...,e_n\}$ vektorového prostoru *V* tak, aby bylo jednoduché nalézt souřadnice vzhledem k této bázi.
2. Nalezneme souřadnice vzhledem k této bázi všech vektorů vyskytujících se v zadané úloze.

3. Řešíme zadanou úlohu na lineární kombinace se souřadnicovými vektory nalezenými v bodě 2.

Příklad:
Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů
$p_1(x) = x^2 - x, p_2(x) = x + 1, p_3(x) = x^2 + 2$ z P_3.

1. Zvolíme bázi $E = (e_1, e_2, e_3)$, $e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ prostoru P_3.
2. Určíme souřadnice vektorů p_1, p_2, p_3.
   $[p_1]_E = [0,-1,1], \quad p_1(x) = 0e_1(x) + (-1)e_2(x) + 1e_3(x),$
   $[p_2]_E = [1,1,0], \quad p_2(x) = 1e_1(x) + 1e_2(x) + 0e_3(x),$
   $[p_3]_E = [2,0,1], \quad p_3(x) = 2e_1(x) + 0e_2(x) + 1e_3(x).$
3. Řešíme úlohu na určení závislosti či nezávislosti souřadnicových vektorů $[p_1]_E, [p_2]_E, [p_3]_E$.

$$\alpha_1[p_1]_E + \alpha_2[p_2]_E + \alpha_3[p_3]_E = o$$
$$\alpha_1[0,-1,1] + \alpha_2[1,1,0] + \alpha_3[2,0,1] = [0,0,0]$$
$$[\alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3] = [0,0,0]$$

Z poslední rovnice dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{array}{rrrcl} & \alpha_2 & +2\alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 0 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} r_3 \\ \updownarrow \\ r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}$$

Rovnice má právě jedno řešení a tím je $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ a proto jsou souřadnicové vektory $[p_1]_E, [p_2]_E, [p_3]_E$ lineárně nezávislé z čehož dostáváme i lineární nezávislost mnohočlenů p_1, p_2, p_3. ♦

<u>Hodnost matice</u>

Definice:
Řádkovým prostorem *R(A)* matice $A \in R^{m,n}$ rozumíme lineární obal řádků matice *A* tj. $R(A) = \left\langle r_1^A, ..., r_m^A \right\rangle$. Sloupcovým prostorem *S(A)* matice $A \in R^{m,n}$ rozumíme lineární obal sloupců matice *A* tj. $S(A) = \left\langle s_1^A, ..., s_n^A \right\rangle$. Hodností matice *A*, značíme *h(A)*, nazýváme dimenzi řádkového či sloupcového prostoru tj. $h(A) = \dim R(A) = \dim S(A)$.

Příklad:
Určete hodnost matice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +2r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jelikož elementární řádkové úpravy ve skutečnosti představují lineární kombinace řádků tak z výše uvedeného vyplývá, že

$R(A) = \langle [1,2,0,-1],[1,1,-2,2],[-1,0,4,-5] \rangle = \langle [1,2,0,-1],[0,-1,-2,3] \rangle$

Navíc je zřejmé, že vektory $[1,2,0,-1],[0,-1,-2,3]$ jsou lineárně nezávislé a tudíž tvoří bázi $R(A)$. Odtud $h(A)$ =dim $R(A)$=2. ♦

Příklad:

Určete bázi a dimenzi podprostoru $U+V$ prostoru R^3, kde $U = \{[u_1,u_2,u_3] : u_1 - u_2 - u_3 = 0\}$ a $V = \{[v_1,v_2,v_3] : v_1 + v_2 - 3v_3 = 0\}$.

Řešení:

Všechny vektory prostoru U musí řešit lineární rovnici $u_1 - u_2 - u_3 = 0$. Tzn. že pro jejich složky platí $u_1 = t+s, u_2 = t, u_3 = s$ pro libovolné parametry $t,s \in R$. Tedy

$\forall u \in U : u = [u_1,u_2,u_3] = [t+s,t,s] = t[1,1,0] + s[1,0,1], \forall t,s \in R$.

Analogicky všechny vektory prostoru V musí řešit lineární rovnici $v_1 + v_2 - 3v_3 = 0$. Tzn. že pro jejich složky platí $v_1 = -p+3q, v_2 = p, v_3 = q$ pro libovolné parametry $p,q \in R$. Tedy

$\forall v \in V : v = [v_1,v_2,v_3] = [-p+3q,p,q] = p[-1,1,0] + q[3,0,1], \forall p,q \in R$.

Potom $\forall w = u+v \in U+V : w = t[1,1,0] + s[1,0,1] + p[-1,1,0] + q[3,0,1], \forall t,s,p,q \in R$ a

$U+V = \langle [1,1,0],[1,0,1],[-1,1,0],[3,0,1] \rangle$.

Nyní stačí z vektorů $[1,1,0],[1,0,1],[-1,1,0],[3,0,1]$ vybrat lineárně nezávislé, neboť právě tyto vektory budou tvořit bázi $U+V$. To můžeme učinit tak, že vektory zapíšeme do řádků matice, tu budeme upravovat na schodový tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -r_1 \\ +r_1 \\ -3r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +2r_2 \\ -3r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ +r_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice je tedy 3 a výše uvedená čtveřice vektorů je lineárně závislá. Z úpravy matice je taktéž patrné, že pokud vezmeme pouze první tři vektory, tak ty již budou tvořit lineárně nezávislou množinu. Tímto bychom splnili první podmínku báze. Druhá podmínka báze přímo vyplývá z toho, že vektor $[3,0,1]$ lze vyjádřit jako kombinaci vektorů $[1,1,0],[1,0,1],[-1,1,0]$ (vyplývá z lineární závislosti čtveřice vektorů) a

$U+V = \langle [1,1,0],[1,0,1],[-1,1,0],[3,0,1] \rangle = \langle [1,1,0],[1,0,1],[-1,1,0] \rangle$.

Libovolný vektor $w \in U+V$ lze tedy vyjádřit jako kombinaci vektorů $[1,1,0],[1,0,1],[-1,1,0]$ a tímto množina $\{[1,1,0],[1,0,1],[-1,1,0]\}$ tvoří bázi $U+V$. Dimenze tohoto prostoru je pak rovna 3 tj. dim $U+V$=3 neboť báze obsahuje 3 vektory. ♦

Frobeniova věta

Věta:

Nechť je dána soustava m rovnic o n neznámých $Ax=b$. Pak má tato soustava řešení jestliže $h([A|b])=h(A)$. Je-li navíc $h(A)=n$ pak má právě jedno řešení a je-li $h(A)<n$ pak má nekonečně mnoho řešení s n- $h(A)$ parametry.

Příklad:

Rozhodněte o řešitelnosti soustav $Ax=b$ a $Ay=c$, kde

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\1&1&-2&2\\-1&0&4&-5\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Řešení:

Budeme tedy nejdříve zjištovat hodnost matice $[A\,|\,b]$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&-1&1\\1&1&-2&2&0\\-1&0&4&-5&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-r_1\\+r_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&-1&1\\0&-1&-2&3&-1\\0&2&4&-6&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\+2r_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&-1&1\\0&-1&-2&3&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$h([A|b])=h(A)=2$ a soustava $Ax=b$ má nekonečně mnoho řešení s n- $h(A)=4-2=2$ parametry.

Nyní se podívejme na matici $[A\,|\,c]$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&-1&1\\1&1&-2&2&-1\\-1&0&4&-5&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-r_1\\+r_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&-1&1\\0&-1&-2&3&-2\\0&2&4&-6&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\+2r_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&-1&1\\0&-1&-2&3&-2\\0&0&0&0&-2\end{array}\right)$$

$3=h([A\,|\,c])\neq h(A)=2$ a soustava $Ay=c$ tedy nemá řešení. ♦