

Cvičení č. 4

LU rozklad, řešení soustav lineárních rovnic LU rozkladem, výpočet inverzní matice LU rozkladem.

LU rozklad.

Definice: Permutační maticí nazýváme takovou matici, která vznikla z jednotkové matice postupnou vzájemnou záměnou sloupců.

Příklad:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} s_1 \leftrightarrow s_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} s_1 \leftrightarrow s_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí: $P^{-1} = P^T$

Definice: Čtvercová matice $L = (l_{ij})$ se nazývá dolní trojúhelníková jestliže $l_{ij} = 0$ pro $\forall i < j$. Matice $U = (u_{ij})$ se nazývá horní trojúhelníková jestliže $u_{ij} = 0$ pro $\forall i > j$.

Příklad:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Věta:

Nechť je dána čtvercová matice A řádu n . Pak existuje permutační matice P řádu n , dolní trojúhelníková matice L řádu n a horní trojúhelníková matice U řádu n tak, že $AP = LU$.

Postup nalezení LU rozkladu:

1. $[A | I] \xrightarrow{\text{Elop.}} [U | \tilde{L}]$. \tilde{L} je dolní trojúhelníková a platí $\tilde{L}A = U$
2. $L = \tilde{L}^{-1}$ a tedy $A = LU$

V kroku 1 i 2 nesmíme zaměňovat řádky ani přičítat násobek řádku k řádku s nižším indexem. Pokud bychom toto pravidlo porušili pak by matice \tilde{L} ani matice L nebyly dolní trojúhelníkové.

Příklad: Nalezněte LU rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Nalezení matice U

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +(-2)r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ +(-3)r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Výpočet \tilde{L}^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +2r_1 \\ +(-7)r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ +3r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$L = \tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AP = LU, \quad P = I, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Poznámka:

V kroku 1 může nastat situace, kdy některý prvek na diagonále je nulový a vzhledem k tomu, že nesmíme zaměňovat řádky ani přičítat násobky řádků pod tímto prvkem, tak není možné dále pokračovat v úpravě na horní trojúhelníkovou matici. V tomto případě však upravíme matici A tak, že zaměníme dva sloupce tak, aby na místě diagonálního nulového prvku byl prvek nenulový. Tímto získáváme taktéž permutační matici P tak, že stejnou operaci provedeme na jednotkové matici.

Řešení soustav lineárních rovnic pomocí LU rozkladu

$$Ax = b, A \text{ je regulární řádu } n \text{ a } AP = LU$$

$$Ax = b \Leftrightarrow AIX = b \Leftrightarrow A(PP^{-1})x = b \Leftrightarrow (AP)y = b \Leftrightarrow (LU)y = b \Leftrightarrow L(Uy) = b \Leftrightarrow Lz = b$$

kde $Uy = z$ a $x = Py$.

$$Ax = b \equiv \begin{cases} 1. Lz = b \\ 2. Uy = z \\ 3. x = Py \end{cases}$$

Příklad: LU rozkladem řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1. Nalezení matice U

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)_{s_1 \leftrightarrow s_3} &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + r_1 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) + (-5)r_2 &\sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -5 & 1 \end{array} \right), & U = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, & \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)_{s_1 \leftrightarrow s_3} \sim \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = P$$

2. Výpočet \tilde{L}^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + r_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) + 5r_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Řešení soustavy

$$Lz = b:$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ -z_1 + z_2 &= 0 \\ -4z_1 + 5z_2 + z_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -1 + z_2 &= 0 \\ -4 + 5z_2 + z_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} z_2 &= 1 \\ z_3 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Uy = z:$$

$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 &= 1 \\ y_2 + y_3 &= 1 \\ -4y_3 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -y_1 + 2y_2 &= 1 \\ y_2 + y_3 &= 1 \\ y_3 &= \frac{1}{4} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} \\ y_2 &= \frac{3}{4} \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$x = Py:$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Řešením je } x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}, x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Zk: } Ax = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet inverzní matice pomocí LU rozkladu

$$AP = LU \Rightarrow A = LUP^{-1}$$

$$A^{-1} = (LUP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}U^{-1}L^{-1} = PU^{-1}L^{-1} = PU^{-1}\tilde{L}$$

Příklad: Pomocí LU rozkladu nalezněte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A^{-1} = PU^{-1}\tilde{L}$$

1. Nalezení matic U, \tilde{L}

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} -r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \cdot 2 \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) + 3r_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right) \\ & U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Výpočet U^{-1}

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) - 3r_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + r_2 \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{4} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.

$$A^{-1} = U^{-1}\tilde{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$