

Cvičení č. 3

Gaussova-Jordanova eliminační metoda, výpočet inverzní matice, elementární řádkové úpravy a násobení matic

Gaussova-Jordanova eliminační metoda

Cílem Gaussovy-Jordanovy eliminační metody je převést rozšířenou matici soustavy na matici, kde na místě původní matice soustavy bude jednotková matice a na místě pravých stran se pak vyskytne řešení soustavy.

$$(A, b) \xrightarrow{\text{E.R.Ú}} (I, x)$$

Příklad:

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array} \right) \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 3 & 9 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & 9 & 45 \end{array} \right) \begin{array}{l} -r_1 \\ -2r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 10 & 5 & 25 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{5} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \cdot 11 \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 22 & 11 & 55 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -2r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{21} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 11 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2r_3 \\ +5r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{11} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} +2r_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Řešením je tedy vektor $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Kontrola viz Cvičení č. 3, 1. příklad.

Inverzní matice

Definice: Je-li dána čtvercová matice A a jestliže existuje čtvercová matice B stejného řádu taková, že $AB = BA = I$, pak se matice B nazývá inverzní matice k matici A a značí se A^{-1} . Matice, ke kterým existuje inverzní matice nazýváme regulární v opačném případě je nazýváme singulární.

Jelikož $x = A^{-1}b$ a $A^{-1}A = I$ můžeme schema Gaussovy-Jordanovy metody přepsat následovně:

$$(A, b) \xrightarrow{\text{E.R.Ú}} (A^{-1}A, A^{-1}b).$$

Použijeme-li tedy místo b jednotkovou matici, můžeme Gaussovou-Jordanovou metodou nalézt matici inverzní k matici A .

$$(A, I) \xrightarrow{\text{E.R.Ú}} (A^{-1}A, A^{-1}I) = (I, A^{-1})$$

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} -r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \cdot 2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3r_3 \\ +3r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3r_3 \\ +3r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 4 & -18 & -12 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 20 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot (-\frac{1}{4}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} -r_2 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ a zkontrolujme } A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Elementární řádkové úpravy a násobení matic

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. Matice výměny řádků

$$T_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T_{1,2}A = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Násobením maticí zleva tedy vyměníme řádky v matici A . Obecně pro matici řádu n má matice, která způsobí výměnu i -tého a j -tého řádku tvar:

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} & i & & j & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

2. Matice násobení řádku číslem

$$T_1^\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T_1^\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Násobením maticí zleva tedy vynásobíme 1. řádek v matici A . Obecně pro matice řádu n má matice, která způsobí vynásobení i -tého řádku tvar:

$$T_i^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad i$$

2. Matice přičtení násobku jednoho řádku k jinému

$$T_{1,2}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, T_{1,2}^\alpha A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a + c & \alpha b + d \end{pmatrix}$$

Násobením maticí zleva tedy přičteme násobek 1. řádku k 2. řádku v matici A . Obecně pro matice řádu n má matice, která způsobí přičtení násobku i -tého řádku k j -tému řádku tvar:

$$T_{i,j}^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

Poznámka: Je tedy vidět, že matice reprezentující řádkovou elementární úpravu získáme z jednotkové matice aplikováním odpovídající řádkové úpravy na tuto jednotkovou matici.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - r_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot 5 \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} - 2r_2 \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = U$$

Odpovídající matice elementárních řádkových úprav mají postupně tvary:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tzn., že jsme prováděli následující násobení matic:

$$A_1 = T_1 A, A_2 = T_2 A_1, A_3 = T_3 A_2, A_4 = T_4 A_3, U = T_5 A_4$$

Postupným dosazením dostaneme vztah:

$$U = (T_5(T_4(T_3(T_2(T_1 A)))))) = (T_5 T_4 T_3 T_2 T_1) A = T A$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Maticе T tedy transformuje matici A na matici U .

$$TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = U$$

Poznámka: Budeme-li stejnými maticemi násobit zprava budeme provádět tytéž operace, ale na sloupcích matice.